1. feladat (15 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(\pi) = -2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' - 2\,y\cos x = 3\sin x\, e^{2\sin x}$$

Mo. (H) $y' - 2\,y\,\cos x = 0$ ... $y_H = C\,\mathrm{e}^{2\,\sin x}$, $C \in \mathbb{R}$ **(5p)**

(I) $y_{ip} = c(x)\,\mathrm{e}^{2\,\sin x}$ ... $c'(x) = 3\sin x$ $c(x) = -3\cos x$ **(5p)**

$\Longrightarrow$ $y_{iá} = y_H + y_{ip} = C\,\mathrm{e}^{2\,\sin x} - 3\cos x\,\mathrm{e}^{2\,\sin x}$ **(2p)**
$-2 = C - 3 \Longrightarrow C = 1.$ **(3p)**

---

2. feladat (19 pont)
Vezesse be az $u = y - 4x$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást! (Elég az implicit alak.)

$$y' = (y - 4x)^2$$

Mo. $u' + 4 = y'$. **(2p)** Behelyettesítve:

$$u' = u^2 - 4, \qquad \textbf{(3p)}$$

aminek megoldásai: $y - 4x = u = \pm 2$ **(3p)** és $\int \frac{1}{u^2-4}du = \int 1dx$ **(2p)** Itt $\int \frac{1}{u^2-4}du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}du = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|$ **(6p)** , vagyis az általános megoldás

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-4x-2}{y-4x+2}\right| = x + c \qquad \textbf{(3p)}$$

---

3. feladat (24 pont)
Oldja meg az $y'' + 4y = \sin^2 x$ differenciálegyenletet!

Mo. A $\lambda^2+4=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $\pm 2i$ **(3p)** , tehát $y_h = c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x))$ **(3p)** . $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ **(2p)** , így az inhomogén egyenlet megoldásait $y_{ip} = A + Bx\cos(2x) + Cx\sin(2x)$ **(3p)** alakban keressük. Ekkor

$$\begin{array}{rl} 4\cdot| & y_{ip} := A + Bx\cos(2x) + Cx\sin(2x) \\ +0\cdot| & y'_{ip} = -2Bx\sin(2x) + 2Cx\cos(2x) + B\cos(2x) + C\sin(2x) \\ 1\cdot| & y''_{ip} = -4Bx\cos(2x) - 4Cx\sin(2x) - 4B\sin(2x) + 4C\cos(2x) \end{array} \qquad \textbf{(6p)}$$

$4A = \dfrac{1}{2}$, $-4B = 0$, $4C = -\dfrac{1}{2}$, tehát $A = \dfrac{1}{8}, B = 0,\ C = -\dfrac{1}{8}$ **(4p)** , így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = \frac{1}{8} - \frac{x\sin(2x)}{8} + c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)) \qquad \textbf{(3p)}$$

---

4. feladat (15 pont)

Van-e olyan megoldása az $f(n+2) = \dfrac{f(n+1)}{12} + \dfrac{f(n)}{12}$ lineáris rekurziónak, amelyre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ numerikus sor Leibniz-típusú sor? Milyen közelítés adható ekkor az $s \approx s_{10}$ közelítés hibájára, ha $f(0) = 2$?

Mo. A lineáris rekurzió általános megoldása: $0 = q^{n+2} - \dfrac{q^{n+1}}{12} - \dfrac{q^n}{12} = q^n\left(q^2 - \dfrac{q}{12} - \dfrac{1}{12}\right)$ egyenlet gyökei $q_1 = \dfrac{1}{3}$, $q_2 = -\dfrac{1}{4}$ **(4p)** , tehát $f(n) = c_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$. **(2p)** $\sum f(n)$ Leibniz típusú, ha $c_1 = 0$, (különben nem váltakozó előjelű, $c_1 = 0$ esetén viszont 4^n monoton növekedése miatt Leibniz) **(4p)** , Mivel $c_1 + c_2 = 2$, tehát $c_2 = 2$ **(2p)** és a közelítés hibájára adható becslés

$$|s - s_{10}| < \frac{2}{4^{11}} \quad \textbf{(3p)},$$

.

---

5. feladat (5+12+10=27 pont)

a) Ismertesse a gyökkritérium valamelyik alakját!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$b1)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2} \qquad\qquad b2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}$$

Mo. a) Tétel kimondása. **(5p)**

$b1$) Gyökkritériummal **(2p)** :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{2e^2}{e^3} \overset{\textbf{(1p)}}{<} 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens } \textbf{(3p)}$$

$b2$) $\sqrt[n]{2}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n \overset{\textbf{(6p)}}{\to} \dfrac{1}{e} \neq 0$,tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens **(4p)** .

IMSC feladat (2+4+2=8 IMSC pont) Ebben a feladatban egy igen egyszerű modell segítségével vizsgáljuk az üvegházhatásért nagymértékben felelős metán $k(t)$ légköri koncentrációjának időfüggését. A koncentráció két okból változik: egyrészt $T = 9$ év felezési idővel bomlik a légköri metán, másrészt, emberi és természeti folyamatok miatt a metán koncentrációja állandó c sebességgel nő.

(a) Írja fel a metán $k(t)$ koncentrációjának időfüggését leíró differenciálegyenletet!

(b) Adja meg a $k(0) = k_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást! (k_0, T és c felhasználásával.)

(c) Határoza meg a kapcsolatot a hosszú idő alatt kialakuló $k_\infty = \lim_{t\to\infty} k(t)$ metán koncentráció és a c kibocsátási sebesség között!

Mo. (a) $\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + c$ **(2p)**

(b) $k_{\text{H,ált}}(t) = Ae^{-\lambda t}$ **(1p)** ; $k_{\text{I,part}} = \dfrac{c}{\lambda}$ **(1p)** ; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ **(1p)** ;

$$k(t) = \frac{cT}{\ln 2} + \Big(k_0 - \frac{cT}{\ln 2}\Big)2^{-t/T} \quad \textbf{(1p)}$$

(c) $k_\infty = \dfrac{cT}{\ln 2}$ **(2p)**

---

1. feladat (15 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' + 3\,y\,\mathrm{ch}\,x = 3x^2\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{sh}\,x}$$

Mo. (H) $\quad y' + 3\,y\,\mathrm{ch}\,x = 0 \qquad \dots \qquad y_H = C\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{sh}\,x}, \quad C \in \mathbb{R}$ **(5p)**

(I) $\quad y_{ip} = c(x)\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{sh}\,x} \qquad \dots \qquad c(x) = x^3$ **(5p)**

$\Longrightarrow \quad y_{iá} = y_H + y_{ip} = C\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{sh}\,x} + x^3\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{sh}\,x}$ **(2p)**
$1 = C + 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$ **(3p)**

---

2. feladat (17 pont)
Vezessan be az $u = \dfrac{y}{x}$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást! (Elég az implicit alak.)

$$y' = \frac{y^2 - 3xy + 2x^2}{xy - 3x^2}$$

Mo. $u'x + u = y'$. **(3p)** Behelyettesítve: $u'x + u = \dfrac{u^2 - 3u + 2}{u - 3}$ **(4p)** , vagyis

$$u' = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{u-3}, \qquad \text{(3p)}$$

aminek általános megoldása

$$\frac{(u-3)^2}{2} = 2\ln|x| + c, \qquad \text{(5p)}$$

vagyis az eredeti differenciálegyenlet megoldása:

$$\frac{\left(\dfrac{y}{x} - 3\right)^2}{2} = 2\ln|x| + c. \qquad \text{(2p)}$$

3. feladat (22 pont)
Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' + 2y'' + 5y' = 4\mathrm{e}^{-x} + 5x$$

Mo. A $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $0, -1 \pm 2i$ **(3p)** , tehát $y_h = c_1 + e^{-x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x))$ **(4p)** . Az inhomogén egyenlet megoldásait $y_{ip} = Ae^{-x} + (Bx + C)x$ **(3p)** alakban keressük. Ekkor

$$\begin{array}{l|l} 5\cdot & y'_{ip} := -Ae^{-x} + 2Bx + C \\ 2\cdot & y''_{ip} = Ae^{-x} + 2B \qquad\qquad (\mathbf{5p}) \\ 1\cdot & y'''_{ip} = -Ae^{-x} \end{array}$$

$-4A = 4$, $10B = 5$, $4B + 5C = 0$, tehát $A = -1, B = \dfrac{1}{2}$, $C = -\dfrac{2}{5}$ **(4p)** , így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{5} + c_1 + e^{-x}(c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)) \qquad (\mathbf{3p})$$

---

4. feladat (14 pont)
Van-e olyan megoldása az $f(n+2) = \dfrac{7}{2}f(n+1) + 2f(n)$ lineáris rekurziónak, amelyre a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ numerikus sor abszolút konvergens? Adja meg azt a megoldást, amelyre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 3$.

Mo. A lineáris rekurziós általános megoldása: $0 = q^{n+2} - \dfrac{7}{2}q^{n+1} - 2q^n = q^n(q^2 - \dfrac{7}{2}q - 2)$ egyenlet gyökei $q_1 = 4$, $q_2 = -\dfrac{1}{2}$ **(3p)** , tehát $f(n) = c_1 4^n + c_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. **(2p)** . $\sum f(n)$ konvergens, ha $c_1 = 0$, **(2p)** , és ekkor abszolútértéke $\dfrac{1}{2}$ hányadosú geoetriai sor, így a sor abszolút konvergens. **(2p)** .

$$3 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = c_2 \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{c_2}{3} \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát $c_2 = -9$ **(1p)** .

5. feladat (5+19+8=32 pont)
a) Ismertesse a hányadoskritérium valamelyik alakját!
b) Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$$b1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+3)\,7^{n+4}} \qquad\qquad b2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-1}{4n^3+6n}$$

Mo. a) Tétel kimondása. **(5p)**
*b*1) Hányadoskritériummal **(2p)** :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\ 3^{n+3}\ 7^{n+4}}{7^{n+5}\ (n+4)\ 3^{n+2}} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7}\ \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{3}{7} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens } \mathbf{(3p)}$$

Mivel $\displaystyle\frac{3^{n+2}}{(n+3)\,7^{n+4}} \overset{\mathbf{(2p)}}{\leq} \frac{3^{n+2}}{7^{n+4}}$, így

$$|s-s_{99}| \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+3)7^{n+4}} \overset{\mathbf{(2p)}}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{7^{n+4}} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{\frac{3^{102}}{7^{104}}}{1-\frac{3}{7}}$$

*b*2) Minoráns kritériummal **(2p)** $\displaystyle\frac{3n^2-1}{4n^3+6n} \overset{\mathbf{(2p)}}{\geq} \frac{2n^2}{4n^3+6n^3} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{1}{5n}$, és $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ divergens, tehát a sor divergens. **(2p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont) Egy fa növekedésének sebessége arányos a maximális elérhető magasságának (H) és pillanatnyi magasságának különbségével. Tegyük fel, hogy egy tölgyfa legfeljebb 45 méter magasra nő és 10 évesen 5 méter magas. Hány évesen éri el a 30 méteres magasságot? (A fa méretét ültetésének pillanatában vehetjük nullának.)

Mo. Legyen $h(t)$ a fa magassága az ültetéstől számított t idő elteltével, a feladatban szereplő konstansok pedig legyenek $H = 45\,\mathrm{m}$, $t_1 = 10\,\text{év}$, $h_1 = 5\,\mathrm{m}$, $h_2 = h(t_2) = 30\,\mathrm{m}$, ahol t_2 a kérdés.

A feladat szövege alapján a keresett $h(t)$ függvény a

$$\dot{h}(t) = \lambda\big(H - h(t)\big) \qquad \textbf{(2p)}$$

differenciálegyneletet elégíti ki. A differenciálegyenlet elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet, melynek megoldása:

$$h_{\mathrm{H,ált}}(t) = Ae^{-\lambda t}, \qquad h_{\mathrm{I,part}}(t) = H, \qquad h_{\mathrm{I,ált}}(t) = Ae^{-\lambda t} + H. \qquad \textbf{(2p)}$$

A $h(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = H$ feltételeket kielégítő megoldás: $h(t) = H(1 - e^{-\lambda t})$ **(1p)** .

A $h(t_1) = h_1$ feltételből kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{\ln\frac{H-h_1}{H}}{t_1} = \frac{\ln(9/8)}{t_1}$, ahonnan

$$h(t) = H\left(1 - (8/9)^{t/t_1}\right), \qquad \textbf{(2p)}$$

és a $h(t_2) = h_2$ egyenlet megoldása:

$$t_2 = t_1 \frac{\ln\big((H - h_2)/H\big)}{\ln(8/9)} = t_1 \frac{\ln(3)}{\ln(9/8)} = 93{,}3\,\text{év}. \qquad \textbf{(1p)}$$