1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{3+y^2}}{2y(2+x^2)} \quad (y \neq 0)$$

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^{2x} \quad (x \neq 0), \qquad y(1) = e^2$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$$

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n^3\cdot 5^n}{(2n)!} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{\sin(n^2)}{n^2\ln(n)}$$

5. feladat (6+14=20 pont)
a) Mit mond ki a (numerikus sorokra vonatkozó) gyökkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{2n+1}{9n-5}\right)^n$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 99. részletösszeggel közelítjük.

6. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk meg egy pozitív értékű, monoton növő függvényt, amelyre teljesül, hogy a grafikonjának bármely pontjába húzott érintő, a ponton átmenő függőleges egyenes és az x tengely által meghatározott háromszög területe 1.

1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{3+y^2}}{2y(2+x^2)} \quad (y \neq 0)$$

Mo. Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{3+y^2}}{2y(2+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int 2y(3+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{3+y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{7p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$2\sqrt{3+y^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^{2x} \quad (x \neq 0), \qquad y(1) = e^2$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{3y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\acute{a}}(x) = Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^3$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^3 + 3c(x)x^2}_{y'(x)} - \underbrace{3c(x)x^2}_{\frac{3y(x)}{x}} = x^3 e^{2x} \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = e^{2x}$.

$$\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \frac{1}{2}e^{2x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^3 = \frac{x^3}{2}e^{2x} \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\acute{a}}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{x^3}{2}e^{2x} + Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(1) = e^2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{e^2}{2}$ **(2p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = \frac{x^3}{2}e^{2x} + \frac{e^2}{2}x^3 \quad (x > 0) \quad (\mathbf{2p}).$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$$

Mo. Másodrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Axe^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Axe^{3x} && | \cdot 3 \\ y'(x) &= A(1+3x)e^{3x} && | \cdot (-4) \\ y''(x) &= A(6+9x)e^{3x} && | \cdot 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2Ae^{3x} = 4e^{3x} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = 2 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 2xe^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= 2xe^{3x} + C_1e^x + C_2e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n^3 \cdot 5^n}{(2n)!} \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{\sin(n^2)}{n^2 \ln(n)}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$

$$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e}{e^3} = \frac{1}{e^2} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \frac{n^3 \cdot 5^n}{(2n)!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.
Ekkor

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+1)^3 5^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^3 \cdot 5^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{5(n+1)^3}{n^3(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}).$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{\sin(n^2)}{n^2 \ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} c_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (6+14=20 pont)
a) Mit mond ki a (numerikus sorokra vonatkozó) gyökkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{2n+1}{9n-5}\right)^n$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 99. részletösszeggel közelítjük.

Mo. a) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú számsorozat **(2p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

(A gyökkritérium egyéb formáinak kimondása is maximális pontot ér.)

b) Legyen $a_n := \left(\frac{2n+1}{9n-5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2n+1}{9n-5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{9} < 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** . Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $n \geq 5$ esetén

$$0 \leq a_n \leq \frac{3}{8} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left|S - \sum_{n=1}^{99} a_n\right| \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sum_{n=100}^{\infty} a_n \overset{(\mathbf{1p})}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{3}{8}\right)^{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{100} \cdot \frac{8}{5}.$$

(Minden egyéb helyes, konvergens geometriai sor tagjaival való felső becslés is maximális pontot ér.)

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk meg egy pozitív értékű, monoton növő függvényt, amelyre teljesül, hogy a grafikonjának bármely pontjába húzott érintő, a ponton átmenő függőleges egyenes és az x tengely által meghatározott háromszög területe 1.

Mo. Legyen f ilyen függvény és $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor a kérdéses háromszög alapjának hossza:

$$x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\mathbf{2p}),$$

a magassága pedig $f(x_0)$ **(1p)** . Azaz minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\frac{f^2(x)}{2f'(x)} = 1 \quad (\mathbf{2p}).$$

Szeparálható differenciálegyenletet kaptunk, amelynek a fenti feltételek melletti megoldásai

$$f(x) = \frac{1}{C - \frac{x}{2}} \quad (C \in \mathbb{R},\ x < 2C) \quad (\mathbf{3p}).$$

Pl. $C = 0$ választással az $\tilde{f}(x) := -\frac{2}{x}$ $\quad (x < 0)$ függvény megfelel a követelményeknek **(2p)** .

1. feladat (16+6=22 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x^2+2x} \quad (x \neq 0, -2)$$

b) Adjuk meg az összes olyan f számsorozatot, amelyre teljesül az

$$f(n) = \frac{5}{4} f(n-1) - \frac{1}{4} f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$$

lineáris rekurzió.

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$\frac{y'}{x} = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \quad (x \neq 0,\, y \neq 0)$$

differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

3. feladat (18 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 2y'' = 8e^{2x}$$

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} ne^{-n-2} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{arctg}(n) \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{\sin(2^n)}{3^n}$$

5. feladat (3+15=18 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort feltételesen konvergensnek? (Írjuk le a definíciót.)

b) Divergens, abszolút konvergens vagy feltételesen konvergens a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2+2}$$

sor?

6. feladat (plusz 10 pontért)
Konvergens-e a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor?

1. feladat (16+6=22 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x^2+2x} \quad (x \neq 0, -2)$$

b) Adjuk meg az összes olyan f számsorozatot, amelyre teljesül az

$$f(n) = \frac{5}{4}f(n-1) - \frac{1}{4}f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$$

lineáris rekurzió.

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x^2+2x} \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arsh}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala (parciális törtekre bontással):

$$\int \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}\left(\ln|x| - \ln|x+2|\right) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\operatorname{arsh}(y(x)) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

b) A lineáris rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

amelynek gyökei: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ **(2p)** . Ebből a rekurzió általános megoldása:

$$f(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + C_2 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$\frac{y'}{x} = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \quad (x \neq 0,\, y \neq 0)$$

differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

Mo. Átrendezve:

$$y'(x) = \frac{x^2}{y^2(x)} + \frac{y(x)}{x} \quad (\mathbf{2p}).$$

Legyen $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ **(2p)** . Ekkor

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u'(x) = \frac{1}{xu^2(x)} \quad (\mathbf{1p}).$$

Szeparálható, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u^2 x} \quad \Longrightarrow \quad \int u^2 \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{u^3(x)}{3} = \ln|x| + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldása:

$$y(x) = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C} \quad (\mathbf{4p}).$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:

$$\widetilde{y}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x\sqrt[3]{3\ln(x) + 1} \quad (\mathbf{1p}) \quad (x > 0) \quad (\mathbf{1p}).$$

---

3. feladat (18 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 2y'' = 8e^{2x}$$

Mo. Harmadrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -2$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y(x) = Ae^{2x}$ $(x \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R})$ alakban (nincs rezonancia) **(2p)** . Deriválva háromszor **(3p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{2x} & &\mid \cdot 0 \\ y'(x) &= 2Ae^{2x} & &\mid \cdot 0 \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} & &\mid \cdot 2 \\ y'''(x) &= 8Ae^{2x} & &\mid \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$16Ae^{2x} = 8e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,\acute{a}}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) = \\ &= \frac{e^{2x}}{2} + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} ne^{-n-2} \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{arctg}(n) \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{\sin(2^n)}{3^n}$$

Mo. *a*) Legyen $a_n := ne^{-n-2} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{e\sqrt[n]{e^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

Tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \operatorname{arctg}(n) \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \underset{(\mathbf{4p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := (-1)^n \frac{\sin(2^n)}{3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{3^n} \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (3+15=18 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort feltételesen konvergensnek? (Írjuk le a definíciót.)

b) Divergens, abszolút konvergens vagy feltételesen konvergens a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2+2}$$

sor?

Mo. *a*) Egy numerikus sort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens és nem abszolút konvergens. **(3p)**

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n \dfrac{2n-1}{n^2+2}$. Ekkor

$$|a_n| \geq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (\mathbf{3p}),$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{3n}$ sor divergens, azaz a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor nem abszolút konvergens **(2p)**.

A $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)** , $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ **(2p)** , illetve

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2n+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{2n-1}{n^2+2} \\
&\Leftrightarrow \quad (2n+1)(n^2+2) \leq (2n-1)(n^2+2n+3) \\
&\Leftrightarrow \quad 2n^3+n^2+4n+2 \leq 2n^3+3n^2+4n-3 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \leq 2n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2 \quad (\mathbf{4p}),
\end{aligned}$$

azaz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton csökkenő **(1p)** . A Leibniz-kritérium alapján a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(1p)** , következésképpen feltételesen konvergens **(1p)** .

6. feladat (plusz 10 pontért)
Konvergens-e a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor?

Mo. Sejtés: divergens, mert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ sor divergens **(2p)** . Az előbbi határérték és az átviteli elv alapján **(2p)** legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n} \quad (\mathbf{4p}).$$

A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n}$ sor divergens, tehát a minoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor is divergens **(2p)** .

1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{x^2+1}{ye^y}$$

2. feladat (21 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$xy' - 2y = 2x \quad (x \neq 0), \qquad y(2) = 0$$

3. feladat (21 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 2y' + y = 8e^{-x} + 5x$$

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(n+1)^2}{(2n)!} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^2+2n+1}{n^3+5n^2+3}$$

5. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor?

1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{x^2+1}{ye^y}$$

Mo. Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+1}{ye^y} \quad \Longrightarrow \quad \int ye^y \,\mathrm{d}y = \int x^2+1 \,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala (parciális integrálással):

$$\int ye^y \,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{5p})}{=} ye^y - \int e^y \,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{3p})}{=} ye^y - e^y + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int x^2+1 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$y(x)e^{y(x)} - e^{y(x)} = \frac{x^3}{3} + x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (21 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$xy' - 2y = 2x \quad (x \neq 0), \qquad y(2) = 0$$

Mo. Átalakítva:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2 \quad (\mathbf{2p})$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\text{á}}(x) = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{7p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^2$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^2 - 2c(x)x}_{y'(x)} + \underbrace{2c(x)x}_{\frac{2}{x}y(x)} = 2 \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = \frac{2}{x^2}$.

$$\int \frac{2}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := -\frac{2}{x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^2 = -2x \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\text{á}}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\text{á}}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} -2x + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$ **(1p)** , azaz

$$\tilde{y}(x) = -2x + x^2 \quad (\mathbf{1p}) \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (\mathbf{1p}).$$

(Alternatív megoldás: $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ helyettesítéssel...)

3. feladat (21 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 2y' + y = 8e^{-x} + 5x$$

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 1$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1e^x + C_2xe^x \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Ae^{-x} + Bx + C \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-x} + Bx + C && \cdot 1 \\ y'(x) &= -Ae^{-x} + B && | \cdot (-2) \\ y''(x) &= Ae^{-x} && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 4Ae^{-x} + Bx + C - 2B = 8e^{-x} + 5x \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = 2,\, B = 5,\, C = 10 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 2e^{-x} + 5x + 10 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= 2e^{-x} + 5x + 10 + C_1e^x + C_2xe^x \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{(n+1)^2}{(2n)!}\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}}e^{-n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2n^2+2n+1}{n^3+5n^2+3}$$

Mo. *a*) Legyen $a_n := \frac{(n+1)^2}{n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(\mathbf{2p})}{=}\frac{(n+2)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)^2}\overset{(\mathbf{2p})}{=}\frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0<1\quad(\mathbf{2p}),$$

azaz a hányadoskritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ sor konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := e^{-n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n\quad(n\in\mathbb{N})$.

$$\sqrt[n]{b_n}\overset{(\mathbf{2p})}{=}\frac{1}{e}\cdot\frac{n+3}{n+2}\underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}}\frac{1}{e}<1\quad(\mathbf{2p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{2n^2+2n+1}{n^3+5n^2+3}\quad(n\in\mathbb{N})$.

Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$c_n\geq\frac{2n^2}{9n^3}=\frac{2}{9n}\quad(\mathbf{4p})$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{2}{9n}$ sor divergens **(2p)** , tehát a minoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .

---

5. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\,n\geq2}\frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor?

Mo. *a*) Legyen $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény **(2p)** . Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<+\infty\quad\Leftrightarrow\quad\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.\qquad(\mathbf{4p})$$

b) Legyen

$$f(x):=\frac{1}{2x\ln^2(x)}\quad(x\geq2)\quad(\mathbf{2p}).$$

Ekkor f nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_2^{b}\frac{1}{x}(\ln(x))^{-2}\,\mathrm{d}x\overset{(\mathbf{3p})}{=}\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{x=2}^{b}\overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(b)}\right)\overset{(\mathbf{1p})}{=}\frac{1}{2\ln(2)}<+\infty$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\,n\geq2} f(n)$ konvergens **(1p)** .
