ANALÍZIS 2. | **II. zárthelyi** | **2022. május 12.**

Mérnökinformatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A $b)$ részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a) \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^k}{k\cdot 2^k} \qquad\qquad b) \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését és a Taylor-sorának konvergenciasugarát!

$$f(x) := \frac{x^3}{4-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\})$$

3. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

4. feladat (8+6+10+4=28 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

5. feladat (14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^2+y^2+xy-3x \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x,y) := x^2 y \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg az arcsin függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtését!

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a)\ \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^k}{k\cdot 2^k} \qquad\qquad b)\ \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

Mo. *a*) Minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_k := \frac{1}{k\cdot 2^k}$. Ekkor

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $R_a = 2$ **(1p)** , azaz minden $x \in]-3,1[$ esetén konvergens a sor **(2p)** .
Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x=-3$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^k}{k}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens **(2p)** ,
- $x=1$ esetén pedig a $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{k}$ sor divergens **(1p)** ,

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-3,1[$ **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = e^{-x^2} \quad (\mathbf{8p}).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár.)

---

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését és a Taylor-sorának konvergenciasugarát!

$$f(x) := \frac{x^3}{4-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\})$$

Mo.

$$\frac{x^3}{4-x^2} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{x^3}{4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \underset{(*)}{\overset{(\mathbf{3p})}{=}} \frac{x^3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} x^{2k+3},$$

ahol a $(*)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 2$ **(3p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 2 **(3p)** .

3. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

Mo. Legyen

$$f(x,y) := \frac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Első megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Legyen $(r_k\cos(\varphi_k), r_k\sin(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ az előbbi sorozat polárkoordinátás alakja **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k,y_k) = f(r_k\cos(\varphi_k), r_k\sin(\varphi_k)) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{r_k^2\left(2\cos^2(\varphi_k)+\cos(\varphi_k)\sin(\varphi_k)\right)}{r_k} =$$
$$= \underbrace{r_k}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0} \underbrace{\left(2\cos^2(\varphi_k)+\cos(\varphi_k)\sin(\varphi_k)\right)}_{\text{korlátos}} \underset{\textbf{(4p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

Második megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$|f(x_k,y_k)| \overset{\textbf{(4p)}}{\leq} |x_k|\frac{2|x_k|+|y_k|}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} |x_k|\left(2\sqrt{\frac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}}+\sqrt{\frac{y_k^2}{x_k^2+y_k^2}}\right) \overset{\textbf{(4p)}}{\leq} 3|x_k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

---

4. feladat (8+6+10+4=28 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

Mo. *a) Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek **(2p)** , és létezik olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^n$, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x} - \underline{a}\rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0 \quad (\mathbf{3p})\,.$$

(A jegyzetben szereplő definíció is maximális pontot ér.)

Elégséges feltétel pontbeli differenciálhatóságra: Ha $\underline{a} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{int}(\,\mathrm{Dom}(\partial_i f))$, és f minden parciális deriváltfüggvénye folytonos $\underline{a}$-ban (vagy gyengébb feltétel: $\underline{a}$ egy környezetén), akkor f (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban **(3p)** .

b) $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ és $f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = 1 \not\to 0 = f(0,0)$ **(5p)** , tehát az átviteli elv miatt f nem folytonos az origóban **(1p)** .

c) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3y(x^2+2y^2) - 6x^2y}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{3x(x^2+2y^2) - 12xy^2}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p})$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)** :

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \quad (\mathbf{2p}) \quad \partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0 \quad (\mathbf{2p}).$$

d) Az origóban nem differenciálható f, mert ott nem folytonos **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)** .

---

5. feladat (14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + xy - 3x \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

Mo. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + y - 3 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y + x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-3=0 \\ 2y+x=0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(2,-1) \quad (\mathbf{2p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a $(2,-1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)** . Minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $H_f(2,-1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)** , következésképpen f-nek lokális minimuma van a $(2,-1)$ pontban **(2p)** .

---

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x,y):=x^2y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Mo.

$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2-2x\right\},$$

tehát normáltartományon integrálunk **(2p)** :

$$\int_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1\int_0^{2-2x} x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=0}^{2-2x}\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int_0^1 2x^2(1-x)^2\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$=\int_0^1 2x^2-4x^3+2x^4\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \left[\frac{2}{3}x^3-x^4+\frac{2}{5}x^5\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{15}.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg az arcsin függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtését!

Mo. Minden $x\in]-1,1[$ esetén $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3p)** , továbbá a binomiális sorfejtés alkalmazásával

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac12}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{k}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac12}{k}x^{2k} \quad (\mathbf{5p}).$$

Ebből pedig minden $x \in]-1,1[$ esetén a hatványsorok tulajdonságai alapján **(2p)**

$$\arcsin(x) = \int_0^x \arcsin'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\mathbf{5p}).$$

ANALÍZIS 2. | **II. pót-/javító zárthelyi** | **2022. május 23.**

Mérnökinformatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (12 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor? Adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

2. feladat (18 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(100)}(0)$ deriváltat!

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

3. feladat (6+10=16 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \ln\left(1+x^2y^4\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right).$$

a) Mit mond ki a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+4y^3}{3x^4+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Határozzuk meg f parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f?

5. feladat (18+6+6=30 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 4xy \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ irány menti deriváltját!

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

integrál értékét!

IMSc feladat (15 IMSc pont) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $\overset{-1}{f}\langle G\rangle := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in G\}$ is nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben! (Segítség: használjuk a nyíltság és a pontbeli folytonosság definícióját.)

1. feladat (12 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor? Adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(3p)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!} \overset{\textbf{(3p)}}{=} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \overset{\textbf{(6p)}}{=} x^2 \operatorname{sh}(x).$$

---

2. feladat (18 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(100)}(0)$ deriváltat!

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Mo.

$$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{(*)}{\overset{\textbf{(3p)}}{=}} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k \overset{\textbf{(2p)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k},$$

ahol a $(*)$ egyenlőség $|x| < 2$ esetén teljesül a binomiális sorfejtés alapján **(2p)**, tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 2 **(2p)**.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_{2k} := \frac{1}{2 \cdot 4^k}\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ **(2p)**. Ekkor (az előadáson tanultak alapján)

$$f^{(100)}(0) = a_{100} \cdot 100! = \frac{1}{2 \cdot 4^{50}} \binom{-\frac{1}{2}}{50} \cdot 100! \quad \textbf{(4p)}.$$

---

3. feladat (6+10=16 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \ln\left(1+x^2y^4\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right).$$

a) Mit mond ki a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \operatorname{Dom}(f)'$ **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \\ \forall (\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \operatorname{Dom}(f) \setminus \{\underline{a}\}\text{-ban halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k, y_k) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \underbrace{\ln\left(1 + x_k^2 y_k^4\right)}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_k^2 + 2y_k^6}\right)}_{\text{korlátos}} \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 + 4y^3}{3x^4 + 2y^2} & , \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Határozzuk meg f parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f?

Mo. a) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3x^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)12x^3}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{12y^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)4y}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^5} = +\infty,$$

azaz $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** ,

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{4y^3}{2y^3} = 2 \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Az origóban nem differenciálható f, mert nem létezik az origóbeli első változó szerinti parciális deriváltja **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)** .

---

5. feladat (18+6+6=30 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 4xy \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ irány menti deriváltját!

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(-1,-1)\} \quad (\mathbf{3p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti három pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)** . Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = H_f(-1,-1) \quad (\mathbf{3p}),$$

azaz $H_f(0,0)$ indefinit, $H_f(1,1) = H_f(-1,-1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(3p)** , következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f-nek, és az $(1,1)$ és $(-1,-1)$ pontokban pedig lokális minimuma van **(2p)** .

b) Az előző részben láttuk, hogy $\mathrm{grad} f(-1,1)$ létezik **(1p)** , ezért

$$D_{\underline{v}} f(-1,1) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \langle \mathrm{grad} f(-1,1), \underline{v} \rangle \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left\langle (-8,8), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\rangle \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0.$$

c) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1(-1,1), \partial_2(-1,1), -1) = (-8,8,-1) \quad (\mathbf{2p}),$$

egy pontja:

$$(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,6) \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az érintősík egyenlete

$$-8(x+1) + 8(y-1) - (z-6) = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad 8x - 8y + z = 10) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

integrál értékét!

Mo.

$$H := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le 2,\ \frac{y}{2}\le x\le 1\right\} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\right\}$$

H normáltartomány **(1p)** , tehát

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_H e^{x^2}\,\mathrm{d}(x,y) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \left[e^{x^2}\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{1p})}{=} e-1.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $G\subseteq\mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $\overset{-1}{f}\langle G\rangle := \{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\in G\}$ is nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben! (Segítség: használjuk a nyíltság és a pontbeli folytonosság definícióját.)

Mo. Legyen $\underline{a}\in \overset{-1}{f}\langle G\rangle$; megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta>0$, hogy $B_\delta(\underline{a})\subseteq G$ **(3p)** . Mivel $f(\underline{a})\in G$ és G nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, ezért létezik olyan $\varepsilon>0$, hogy

$$]f(\underline{a})-\varepsilon, f(\underline{a})+\varepsilon[\ \subseteq G \quad (\mathbf{4p}).$$

Az f függvény $\underline{a}$-beli folytonossága miatt létezik olyan $\delta>0$, hogy minden $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ és $|\underline{x}-\underline{a}|<\delta$ esetén

$$f(\underline{x})\in\ ]f(\underline{a})-\varepsilon, f(\underline{a})+\varepsilon[\ \subseteq G \quad (\mathbf{5p}),$$

azaz $\underline{x}\in B_\delta(\underline{a})$ esetén $\underline{x}\in \overset{-1}{f}\langle G\rangle$ teljesül **(3p)** .

ANALÍZIS 2.	**II. aláíráspótló zárthelyi**	**2022. május 31.**
Mérnökinformatikus szak	α-variáns	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!}{k^k} x^k$$

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény 0 középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!

$$f(x) := e^{2x}\,\mathrm{sh}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

3. feladat (14 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú hatodfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével!

4. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\mathrm{ch}\left(x^2y\right)} \cdot \mathrm{arctg}\left(x^2+2y^3\right)$$

5. feladat (10+8+10+4=32 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} - 2x + 2y & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk meg két szükséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

6. feladat (16 pont)
Legyen H az $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos halmaz.

$$\int_H 2x\,\mathrm{d}(x,y) = ?$$

1. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!}{k^k} x^k$$

Mo. Legyen $a_k := \frac{k!}{k^k}$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!} \overset{\textbf{(6p)}}{=} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \underset{\textbf{(4p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{e},$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara e **(2p)** .

---

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény 0 középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!

$$f(x) := e^{2x}\,\mathrm{sh}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) \overset{\textbf{(2p)}}{=} e^{2x}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x) \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k - 1}{2\cdot k!}x^k,$$

tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** .

---

3. feladat (14 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú hatodfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével!

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \cos(2x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k x^{4k}}{(2k)!} \quad \textbf{(4p)},$$

tehát (mivel az n-edrendű Taylor polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T_{0,6}^{f}(x) = 1 - \frac{4x^4}{2!} = 1 - 2x^4 \quad \textbf{(6p)},$$

tehát

$$\int_0^1 \cos(2x^2)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 T_{0,6}^{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - 2x^4\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left[x - \frac{2x^5}{5}\right]_{x=0}^{1} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{3}{5}.$$

---

4. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\operatorname{ch}(x^2y)} \cdot \operatorname{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right)$$

Mo. Az

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x^2y)} \cdot \operatorname{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right)$$

függvény értelmezve van az origóban **(2p)** , és ott folytonos **(2p)** , tehát

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\operatorname{ch}(x^2y)} \cdot \operatorname{arctg}\left(x^2 + 2y^3\right) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\operatorname{ch}(0)} \cdot \operatorname{arctg}(0) \overset{\textbf{(2p)}}{=} 1 \cdot 0 = 0$$

---

5. feladat (10+8+10+4=32 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} - 2x + 2y & , \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk meg két szükséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

Mo. a) *Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek **(2p)** , és létezik olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^n$, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x} - \underline{a}\rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0 \quad \textbf{(3p)}\,.$$

(A jegyzetben szereplő definíció is maximális pontot ér.)

Szükséges feltételek pontbeli differenciálhatóságra: Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor

(i) f folytonos $\underline{a}$-ban **(2p)** ,

(ii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén létezik f-nek az i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\underline{a}$-ban és

$$\mathrm{grad} f(\underline{a}) = (\partial_1 f(\underline{a}), \ldots, \partial_n f(\underline{a})) \quad \textbf{(3p)}$$

b) Nem, mert az origóban nem folytonos **(2p)** , ugyanis

$$\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0) \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{2}{k^4}} - \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \overset{\textbf{(2p)}}{\neq} 0 = f(0,0)$$

c) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} - 2 \quad \textbf{(2p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4xy^5}{(x^2+y^4)^2} + 2 \quad \textbf{(2p)}$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)** :

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x} = -2 \quad \textbf{(2p)}$$
$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{y} = 2 \quad \textbf{(2p)}.$$

d) Az origóban nem differenciálható f, mert ott nem folytonos **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)** .

---

6. feladat (16 pont)

Legyen H az $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos halmaz.

$$\int_H 2x \,\mathrm{d}(x,y) = ?$$

Mo. Legyen a feladatbeli halmaz H, ekkor

$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \le x \le 1,\; x^2 \le y \le \frac{1}{x} \right\} \quad (\mathbf{3p})$$

H normáltartomány az integrandus pedig folytonos **(2p)** , tehát

$$\int_H 2x \,\mathrm{d}(x,y) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} 2x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2 - 2x^3 \,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$

$$= \left[2x - \frac{x^4}{2} \right]_{x=\frac{1}{2}}^{1} = 2 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{32} = \frac{17}{32} \quad (\mathbf{2p})$$
