1. feladat (17 pont) Számolja ki az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$ sor konvergenciatartományát és $f(x)$ összegfüggvényét! Mennyi lesz $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$?

Mo. Mivel $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$ **(5p)** , és a sor konvergenciatartománya $\mathbb{R}$ **(2p)** , így $f(x) = \frac{x}{2}(\operatorname{sh}(2x) - 2x)$ **(5p)** . $f^{(100)}(0) = 100! \cdot \dfrac{4^{49}}{99!} = 100 \cdot 4^{49}$ **(3p)** , $f^{(101)}(0) = 0$ **(2p)**

---

2. feladat (23 pont) Írja fel az $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[5]{32 + x^4}}$ függvény 0 középpontú nyolcadfokú Taylor-polinomját, majd adjon becslést arra, milyen jól közelíthető az $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt[5]{32+x^4}}dx$ integrál a nyolcadfokú Taylor-polinom integráljával!

Mo. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[5]{32+x^4}} = \dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{x^4}{32}\right)^{-1/5} = \dfrac{3}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{5}}{n}\frac{x^{4n}}{32^n}$ **(6p)** , ha $|x| < \sqrt[4]{32}$ **(2p)** . Így $T_8(x) = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{x^4}{32} + \dfrac{6}{2\cdot 25}\cdot\dfrac{x^8}{32^2}\right)$ **(3p)** . Ugyanakkor

$$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt[5]{32+x^4}}dx = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{5}}{n}\frac{1}{32^n(4n+1)} \qquad \textbf{(5p)},$$

ami egy Leibniz típusú sor **(3p)** , tehát a nyolcadfokú Tayor-polinommal való közelítés hibája felülről becsülhető az $n = 3$ tag abszolútértékével **(2p)** , ami $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{66}{6\cdot 625}\cdot\dfrac{1}{13\cdot 32^3} < 10^{-7}$ **(2p)** .

---

3. feladat (5+23=28 pont) *a*) Írja fel egy $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény totális differenciálhatóságának definícióját!
(*b*) Hol folytonos, illetve totálisan differenciálható az alábbi függvény? Írja fel a parciális deriváltakat!

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

Mo. *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{2x^2+y^2}$ nem létezik, mert az $y = mx$ egyeneseken $\dfrac{3m}{2+m^2}$ **(5p)** különböző határértéket kapunk, így az origóban a függvény nem folytonos **(2p)** , így nem is totálisan differenciálható **(2p)**

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2}$ nem létezik, mert az $y = mx$ egyeneseken $\dfrac{2m}{1+3m^2}$ **(5p)** különböző határértéket kapunk, így az origóban a függvény nem folytonos **(2p)** , így nem is totálisan differenciálható **(2p)**

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = f'_y(0,0)$ **(4p)** , és az origón kívül

$$f'_x(x,y) = \frac{2y(x^2+3y^2)-4x^2y}{(x^2+3y^2)^2} \qquad f'_y(x,y) = \frac{2x(x^2+3y^2)-12xy^2}{(x^2+3y^2)^2} \qquad \textbf{(6p)}$$

A függvény, és parciális deriváltjai a $(0,0)$ pont kivételével racionális törtfüggvények, melyeknek nevezője nem 0, így ott a függvények folytonosak és differenciálhatóak. A tanult tétel értelmében az $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon f totálisan differenciálható. **(4p)**

---

4. feladat (22 pont) Határozza meg az $f(x,y) = x^3 + 2xy - 6x - 4y^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát!

Mo. $f'_x(x,y) = 3x^2 + 2y - 6 = 0$, $f'_y(x,y) = 2x - 8y = 0$ **(4p)** megoldásai $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{8}\right)$ és $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ **(5p)** . A Hesse-mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -48x - 4 = \begin{cases} 68, & \text{ha } (x,y) = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{8}\right) \\ -68, & \text{ha } (x,y) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(8p)},$$

így a $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ pontban nincs lokális szélsőértékhely **(2p)** , $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{8}\right)$ pontban pedig lokális maximuma van, hiszen $6 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) < 0$ **(3p)** .

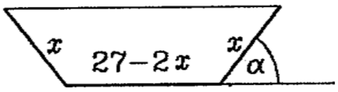
---

5. feladat (10 pont) Számolja ki az $f(x,y) = \cos(x+2y)$ függvény integrálját a $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,0)$ csúcsú háromszöglapon!

Mo. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^{3-y} \cos(x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \big[\sin(x+2y)\big]_{x=2y}^{3-y} dy =$ **(6p)**

$\displaystyle= \int_0^1 \sin(3+y) - \sin(4y)\,dy = -\cos 4 + \cos 3 + \frac{\cos 4}{4} - \frac{1}{4}$ **(4p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont) Csapadékvíz-megtartás céljából az út szélére trapéz keresztmetszetű szikkasztóárkot szeretnénk létesíteni. Az árok adatai (deciméterben) az ábrán láthatók. Adja meg x és α értékét, hogy a lehető legtöbb vizet tudjuk megfogni!



Mo. A függvény, amelynek maximumát keressük: $T = (27 - 2x + x\cos\varphi)x\sin\varphi$. A $T_x = 0$ egyenletből $\sin\varphi = 0$, de ez a feladat szempontjából érdektelen, vagy $\cos\varphi = 2 - \frac{27}{2x}$. Ezt a $T_\varphi = 0$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 0$ (a feladat szempontjából érdektelen), vagy $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$. A második parciális deriváltakat is kiszámítva: $D(9, \frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{243\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{9}{2}\right)^2 > 0$, $T_{xx}(9, \frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$. Tehát a trapéz keresztmetszete $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$ választással lesz maximális.

ANALÍZIS 2. | **II. Pótzárthelyi** | **2023. június 5.**
Mérnökinformatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 75 perc

1. feladat (14+8=22 pont) $f(x) = \dfrac{1}{x+7}$; $g(x) = \ln(x+7)$; $x_0 = -2$

a) Írja fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!
b) Írja fel a g függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát!

a)

$$f(x) = \frac{1}{x+7} = \frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{x-x_0}+5} \;3\; = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+2}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n (x+2)^n \quad 6$$

$$q = -\frac{x-2}{5};\ |q|<1 \iff |x-2|<5$$

$$K.T. = (-7, +3) \quad 5$$

b)

$$g' = f \;1\; \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = g(x) - g(x_0) \Rightarrow$$

$$g(x) = g(x_0) + \;2\; \int_{t=-2}^{x} \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n (t+2)^n\,dt \;2\; = \ln 5 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\left[\frac{(t+2)^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{x} =$$

ha $x \in (-7, +3)$

$$= \ln 5 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}\cdot(n+1)}(x+2)^{n+1} \;3\; = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,5^n}(x+2)^n$$

2. feladat (5+10=15 pont) *a*) Írja fel az x_0 pontban $n+1$-szer differenciálható f függvény x_0 középpontú n-edrendű Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradéktagot!
b) Becsülje meg, hogy mekkora hibával közölhető $\cos(0{,}2)$ értéke a koszinuszfüggvény ötödrendű, 0 középpontú a Taylor-polinomjának segítségével!

a)

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)} \;3\; + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \;1$$

$$1\quad \xi \in (x_0, x) \cup (x, x_0)$$

b)

$$|\cos(0.2) - T_5(0.2)| = |R_5(0.2)| = \left|\frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!}(0.2)^6\right| \;4\; \le \frac{(0.2)^6}{6!} \quad 3$$

$$|\cos^{(6)}(\xi)| = |-\cos\xi| \le 1 \quad 3$$

I-2-1

3. feladat (15+8=23 pont) *a*) Adja meg az $f(x,y) = e^{x^2+2y} - 2x^3y$ függvény érintősíkját a $P(2,-2)$ pontban!
b) Határozza meg a függvény iránymenti deriváltja a P pontban a $(-3,1)$ iránnyal párhuzamosan!

a) $f'_x(x,y) = 2x\, e^{x^2+2y} - 6x^2y$ 3 ; $f'_x(2,-2) = 4 + 48 = 52$ 2

$f'_y(x,y) = 2\, e^{x^2+2y} - 2x^3$ 3 ; $f'_y(2,-2) = 2 - 16 = -14$ 2

Érintő sík: $z = z_0 + f'_x(P)(x-x_0) + f'_y(P)(y-y_0)$ (2)

$z_0 = f(2,-2) = 1 + 32 = 33$ (1) ; $\underline{z = 33 + 52(x-2) - 14(y+2)}$ (2) 5

b) $\|(-3,1)\| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$ 3 ; $\underline{v} = \frac{(-3,1)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$\left.\frac{df}{d\underline{v}}\right|_P = \langle \operatorname{grad} f(P), \underline{v} \rangle$ 3 $= \underline{52 \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} - \frac{14}{\sqrt{10}}}$ 2 $= \underline{\frac{-170}{\sqrt{10}}}$

4. feladat (25 pont) Határozza meg az $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 15y^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát!

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 3 \;\; 3 \;\; = 0 \implies x_1 = 1, \; x_2 = -1 \;\; 3 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 30y = 3y(y-10) \;\; 3 \;\; = 0 \implies y_1 = 0, \; y_2 = 10 \;\; 3 \end{cases}$$

Vizsgálandó pontok: $P_1(1,0)$; $P_2(-1,0)$; $P_3(1,10)$; $P_4(-1,10)$ 2

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y-30 \end{vmatrix} = 6x(6y-30) \quad 5$$

P_1: $H(1,0) = -180 < 0 \implies$ nincs lok. szél. ért.

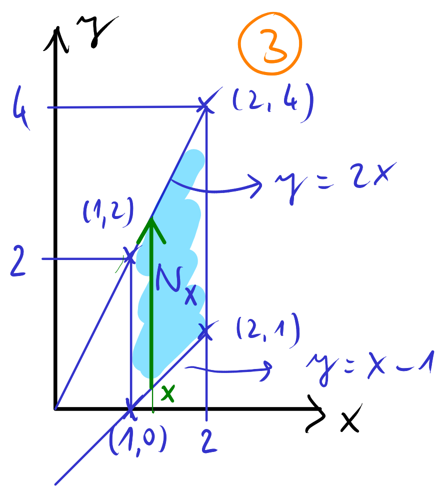
P_2: $H(-1,0) = +180 > 0$; $f''_{xx}(P_2) = -6 < 0 \implies$ lok. max.

P_3: $H(1,10) = +180 > 0$; $f''_{xx}(P_3) = +6 > 0 \implies$ lok. min.

P_4: $H(-1,10) = -180 < 0 \implies$ nincs lok. szél. ért.

6

5. feladat (15 pont) Számolja ki az $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ függvény integrálját a $(1,0)$, $(2,1)$, $(2,4)$, $(1,2)$ csúcsú négyszöglapon!



4

$$\iint_{N_x} f(x,y)\,dT = \int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=x-1}^{2x}\frac{y}{x}\,dy\right)dx =$$

x^2-2x+1

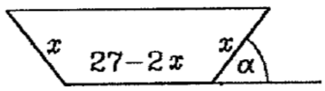
4

$$= \int_{x=1}^{2}\frac{1}{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-1}^{2x}dx = \int_{x=1}^{2}\frac{1}{x}\left(2x^2-\frac{(x-1)^2}{2}\right)dx =$$

4

$$= \int_{x=1}^{2}\left(\frac{3}{2}x+1-\frac{1}{2x}\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^2 = \frac{3}{4}(4-1)+(2-1)-\frac{\ln 2}{2} = \frac{13}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

IMSC feladat (8 IMSC pont) Csapadékvíz-megtartás céljából az út szélére trapéz keresztmetszetű szikkasztóárkot szeretnénk létesíteni. Az árok adatai (deciméterben) az ábrán láthatók. Adja meg x és α értékét, hogy a lehető legtöbb vizet tudjuk megfogni!



A függvény, amelynek maximumát keressük: $T = (27-2x+x\cos\varphi)x\sin\varphi$. A $T_x = 0$ egyenletből $\sin\varphi = 0$, de ez a feladat szempontjából érdektelen, vagy $\cos\varphi = 2-\frac{27}{2x}$. Ezt a $T_\varphi = 0$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 0$ (a feladat szempontjából érdektelen), vagy $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$. A második parciális deriváltakat is kiszámítva: $D(9,\frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{243\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{9}{2}\right)^2 > 0$, $T_{xx}(9,\frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$. Tehát a trapéz keresztmetszete $x = 9$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$ választással lesz maximális.

Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás azt igazolja, hogy a kiszámolt pontban a T függvénynek lokális maximuma van. További vizsgálat szükséges annak igazolásához, hogy ez a jelen esetben egyben globális maximum is.