1. feladat (12+10=22 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A $b)$ részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+2)^n}{3n \cdot 2^n} \qquad\qquad b) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

2. feladat (20 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

$$f(x) := \frac{1}{(4-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{4\})$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a határértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(x^2y\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) =?$$

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3x\,\mathrm{ch}(y)}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

5. feladat (16+6+6=28 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ irány menti deriváltját.

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

6. feladat (plusz 10 pontért)
Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en a sin függvény 0 középpontú Taylor-sora?

1. feladat (12+10=22 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+2)^n}{3n\cdot 2^n} \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{1}{3n\cdot 2^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot 2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $R_a = 2$ **(2p)** , azaz minden $x \in]-4,0[$ esetén konvergens a sor **(2p)** ($x \in \mathbb{R}\setminus[-4,0]$ esetén pedig divergens).
Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x=-4$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{3n}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens **(2p)** ,
- $x=0$ esetén pedig a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{3n}$ sor divergens **(1p)** ,

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-4,0[$ **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(x^2) \quad (\mathbf{8p}).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ sor konvergenciasugarának meghatározásáért önmagában nem jár pont.)

---

2. feladat (20 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

$$f(x) := \frac{1}{(4-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{4\})$$

Mo. Legyen $g(x) := \frac{1}{4-x}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{4\})$, ekkor $g' = f$ **(2p)** .

$$g(x) = \frac{1}{4-x} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} \underset{(*)}{\overset{(\mathbf{2p})}{=}} \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}x^n,$$

ahol a $(*)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 4$ **(2p)** , tehát g (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara 4 **(1p)** .

A konvergenciasugár deriválásnál nem változik **(1p)** , ezért az f függvény (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara is 4 **(2p)** , továbbá $x \in \mathbb{R}$ és $|x| < 4$ esetén

$$f(x) = g'(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}}x^n.$$

Jelölje $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az f (0 középpontú) Taylor-sorának együttható-sorozatát. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} a_{99}\cdot 99! \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{100!}{4^{101}}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a határértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(x^2y\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) = ?$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \mathrm{Dom}(f)'$ (azaz $\underline{a}$ torlódási pontja az f függvény értelmezési tartományának) **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \\ \forall(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \mathrm{Dom}(f)\setminus\{\underline{a}\}\text{-ban halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Legyen $f(x,y) := \sin\left(x^2y\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Tegyük fel, hogy $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k,y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k,y_k) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \underbrace{\sin\left(x_k^2y_k\right)}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x_k^2+2y_k^6}\right)}_{\text{korlátos}} \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a fenti gondolatmenet az átviteli elv használata nélkül szerepel.)

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3x\,\mathrm{ch}(y)}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a)* Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3\,\mathrm{ch}(y)(x^2+2y^2) - 6x^2\,\mathrm{ch}(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{3x\,\mathrm{sh}(y)(x^2+2y^2) - 12xy\,\mathrm{ch}(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{3}{x^2} = +\infty \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} = 0 \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

5. feladat (16+6+6=28 pont)
Legyen
$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ irány menti deriváltját.

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén
$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x \quad \textbf{(1p)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\} \quad \textbf{(4p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

tehát
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

azaz $H_f(0,0)$ indefinit, $H_f(1,1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f-nek, az $(1,1)$ pontban pedig lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az f függvény differenciálható a $(-1,1)$ pontban **(1p)** , ezért
$$D_{\underline{v}} f(-1,1) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \langle \mathrm{grad} f(-1,1), \underline{v} \rangle \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left\langle (0,6), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\rangle \overset{\textbf{(1p)}}{=} -3\sqrt{2}.$$

c) Az érintősík egy normálvektora:
$$(\partial_1 f(-1,1), \partial_2 f(-1,1), -1) = (0,6,-1) \quad \textbf{(2p)},$$

egy pontja:
$$(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,3) \quad \textbf{(2p)},$$

tehát az érintősík egyenlete
$$0(x+1) + 6(y-1) - (z-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6y - z = 3 \quad \textbf{(2p)}.$$

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en a sin függvény 0 középpontú Taylor-sora?

Mo. A sin függvényt előállítja a Taylor sora $\mathbb{R}$-en **(1p)** , tehát a kérdés, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)\right| = 0$$

teljesül-e **(2p)** . Mivel sin korlátos, $T_{n,0}^{f}$ pedig minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén n-edfokú, nem konstans polinom **(2p)** , ezért
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)\right| = +\infty$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén **(3p)** , tehát $\left(T_{n,0}^{\sin}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nem egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en **(2p)** .

---

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+2n}{n!}x^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{9^n}(x+1)^{2n}$$

2. feladat (10+13=23 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = -1$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

$$f(x) := \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

b) Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú tizenkettedfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével.

3. feladat (6+10=16 pont)

a) Mit mond ki a folytonosságra vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) Folytonos-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^4+3y^4} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)+y}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

5. feladat (13+8+6=27 pont)
Legyen

$$f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 7 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki f origóbeli iránymenti deriváltjainak maximumát, és adjuk meg azt a vektort, amely mentén maximális az iránymenti derivált.

c) Határozzuk meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

6. feladat (plusz 10 pontért)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Indokoljunk.)

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+2n}{n!}x^n \qquad\qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{9^n}(x+1)^{2n}$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \dfrac{n^2+2n}{n!}$. Ekkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^2+2n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+1)^2+2n+2}{(n^2+2n)(n+1)} \underset{(\mathbf{3p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0,$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** , tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens **(1p)** .

b) Legyen $u := (x+1)^2$ **(2p)** , és vizsgáljuk a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{9^n}u^n$ sor konvergenciáját. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $b_n := \dfrac{n}{9^n}$. Mivel

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{9} \underset{(\mathbf{2p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{1}{9},$$

ezért $R_b = 9$ **(1p)** , tehát az eredeti sor $|x+1| < 3$ esetén konvergens, $x = -4, 2$ esetén pedig divergens **(2p)** , azaz pontosan akkor konvergens ha $x \in]-4,2[$ **(1p)** .

---

2. feladat (10+13=23 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = -1$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

$$f(x) := \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

b) Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú tizenkettedfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével.

Mo. *a*)

$$f(x) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1-(-(x+1))} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n,$$

ahol az utolsó egyenlőség $|x+1| < 1$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 1 **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát (mivel az n-edrendű Taylor-polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T^f_{0,12}(x) = x^3 - \frac{x^9}{6} \quad (\mathbf{5p}),$$

következésképpen

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 T^f_{0,12}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - \frac{x^9}{6}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{60}\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{7}{30}.$$

---

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a folytonosságra vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) Folytonos-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^4+3y^4} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ **(2p)** . Ekkor

$$f \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban} \iff \begin{array}{l} \underline{x}_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\underline{a}) \\ \forall (\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \mathrm{Dom}(f)\text{-ben halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Mivel $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(1p)** és

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \quad \textbf{(3p)},$$

az átviteli elv alapján f nem folytonos az origóban **(2p)** , tehát nem folytonos **(1p)** .

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)+y}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a)* Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y\cos(xy)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+y)2x}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{(x\cos(xy)+1)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+y)4y}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 \quad \textbf{(2p)},$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{2y^3} = +\infty \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

b) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

---

5. feladat (13+8+6=27 pont)
Legyen
$$f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 7 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki f origóbeli iránymenti deriváltjainak maximumát, és adjuk meg azt a vektort, amely mentén maximális az iránymenti derivált.

c) Határozzuk meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén
$$\partial_1 f(x,y) = 4x - 2y - 4 \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 4y - 2x - 4 \quad \textbf{(1p)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = 4 \end{array}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (2,2) \quad \textbf{(3p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$
azaz $H_f(2,2)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, tehát f-nek a $(2,2)$ pontban lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az f függvény differenciálható az origóban, ezért az origóbeli iránymenti deriváltak maximuma $\|\mathrm{grad} f(0,0)\|$ **(2p)** , azaz
$$\|\mathrm{grad} f(0,0)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} \|(-4,-4)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} 4\sqrt{2},$$
és a pontbeli gradiens irányában vétetik fel a maximum, vagyis az $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ vektoron **(2p)** .

c) Az érintősík egy normálvektora:
$$(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0), -1) = (-4,-4,-1) \quad \textbf{(2p)},$$
egy pontja:
$$(0,0,f(0,0)) = (0,0,7) \quad \textbf{(2p)},$$
tehát az érintősík egyenlete
$$-4x - 4y - z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 4y + z = 7 \quad \textbf{(2p)}.$$

---

6. feladat (plusz 10 pontért)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n + n^2x^9}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Indokoljunk.)

Mo. Legyen $f_n(x) := \frac{x}{n+n^2x^9} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$ **(1p)** . Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(1p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\|f_n\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \quad \textbf{(3p)},$$
tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon **(2p)**, így a tanultak alapján:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} 0.$$

---

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok? A *b)* részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin^n(n)}{(n+2)^n}(x-2)^n \qquad\qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n!}$$

2. feladat (10+12=22 pont)
Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{8+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) Határozzuk meg az f függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

b) Adjuk meg az $f^{(99)}(0)$ és $f^{(100)}(0)$ deriváltakat és a (0 középpontú) Taylor sor 4. együtthatóját; az utóbbit kizárólag az alapműveletek és hatványozás segítségével.

3. feladat (12 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{|xy|} = ?$$

4. feladat (12+4+5=21 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^6+y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

c) Számítsuk ki az f függvény $(1,0)$ pontbeli $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irány menti deriváltját.

5. feladat (5+20=25 pont)

a) Mit mond ki a Weierstrass-tétel (más néven: Weierstrass-féle maximum-minimum elv) $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén?

b) Legyen

$$f(x,y) := xy(2-x-y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozzuk meg f szélsőértékeit (amennyiben léteznek) a $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszöglapon.

1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin^n(n)}{(n+2)^n}(x-2)^n \qquad\qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n!}$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \dfrac{\sin^n(n)}{(n+2)^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{|\sin(n)|}{n+2} \underset{(\mathbf{4p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** , tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n!} \overset{(\mathbf{3p})}{=} (x+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{2n!} \overset{(\mathbf{5p})}{=} (x+1)\,\mathrm{ch}(x+1) \quad .$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!}$ sor konvergenciasugarának meghatározásáért önmagában nem jár pont.)

---

2. feladat (10+12=22 pont)
Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{8+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) Határozzuk meg az f függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

b) Adjuk meg az $f^{(99)}(0)$ és $f^{(100)}(0)$ deriváltakat és a (0 középpontú) Taylor sor 4. együtthatóját; az utóbbit kizárólag az alapműveletek és hatványozás segítségével.

Mo. *a*)

$$f(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} 2\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{8}} \overset{(\mathbf{4p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{x^{2n}}{2^{3n-1}},$$

ahol az utolsó egyenlőség $x^2 < 8$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $2\sqrt{2}$ **(1p)**.

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje a_n a (0 középpontú) Taylor-sor n-edik együtthatóját. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 99! \cdot a_{99} \overset{(\mathbf{2p})}{=} 99! \cdot 0 = 0$$

$$f^{(100)}(0) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 100! \cdot a_{100} \overset{(\mathbf{4p})}{=} 100! \cdot \binom{\frac{1}{3}}{50} \frac{1}{2^{149}}$$

$$a_4 \overset{(\mathbf{1p})}{=} \binom{\frac{1}{3}}{2} \frac{1}{2^5} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{1}{3^2 2^5}$$

---

3. feladat (12 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{|xy|} = ?$$

Mo. Legyen $f(x,y) := \frac{\sin(xy)}{|xy|}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \ (\mathbf{4p}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,-x) = -1 \ (\mathbf{6p}),$$

tehát a kérdéses határérték nem létezik **(2p)** .

---

4. feladat (12+4+5=21 pont)

Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^6 + y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

c) Számítsuk ki az f függvény $(1,0)$ pontbeli $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irány menti deriváltját.

Mo. *a)* Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+y^2}} \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^6+y^2}} \quad (\mathbf{2p}).$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x} = 0 \quad (\mathbf{3p}),$$

$$\lim_{y\to 0\pm} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{|y|}{y} = \pm 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

b) Az origóban f nem differenciálható, mert $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

c) Az f függvény differenciálható az $(1,0)$ pontban ezért $\underline{e} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ esetén

$$D_{\underline{e}}(1,0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \langle \operatorname{grad} f(1,0), \underline{e} \rangle \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left\langle (3,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{3}{\sqrt{2}}$$

---

5. feladat (5+20=25 pont)

a) Mit mond ki a Weierstrass-tétel (más néven: Weierstrass-féle maximum-minimum elv) $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén?

b) Legyen

$$f(x,y) := xy(2-x-y) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\,.$$

Határozzuk meg f szélsőértékeit (amennyiben léteznek) a $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszöglapon.

Mo. *a*) Legyen $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény és $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ kompakt halmaz **(2p)**. Ekkor létezik olyan $\underline{x}_-$, $\underline{x}_+ \in K$, hogy

$$f\left(\underline{x}_-\right) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) \quad \text{és} \quad f\left(\underline{x}_+\right) = \sup_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) \quad \textbf{(3p)}.$$

b) Legyen T a feladatbeli halmaz, azaz

$$T := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 2-x\} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az f függvény folytonos a T halmazon, és T kompakt, így a Weierstrass-tétel alapján f-nek léteznek szélsőértékei a T halmazon **(1p)** . T belső pontjaiban f differenciálható, ezért itt a stacionárius pontokban lehetnek szélsőértékek **(1p)** . Minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 2y - 2xy - y^2 \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2x - x^2 - 2xy \quad \textbf{(1p)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} y(2-2x-y)=0 \\ x(2-x-2y)=0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(3p)} \overset{(x,y)\in\mathrm{int}(T)}{\Longleftrightarrow} (x,y) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \quad \textbf{(4p)},$$

azaz egy lehetséges szélsőértékhely: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

T minden határpontjában 0 a függvényérték **(4p)** , továbbá $f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$ **(1p)** , következésképpen

$$\min_T f = 0 \quad \text{és} \quad \max_T f = \frac{8}{27} \quad \textbf{(2p)}.$$
