*** 1. feladat (12+12=24 pont)**

a)

$$\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sh}(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

b) Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol

$$f(x,y,z) := \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right),$$
$$H := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\ge 0\right\}.$$

Mo. a)

$$H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$$

H normáltartomány, az integrandus folytonos H-n **(1p)** , tehát

$$\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sh}(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \int_H \operatorname{sh}(x^2)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\mathbf{(3p)}}{=} \int_0^1\int_0^x \operatorname{sh}(x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{(2p)}}{=}$$
$$= \int_0^1 x\operatorname{sh}(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \left[\frac{\operatorname{ch}(x^2)}{2}\right]_{x=0}^1 \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(1)-1) = \frac{1}{4}\left(e+\frac{1}{e}-2\right).$$

b)

Gömbi koordinátákkal **(1p)** :

$$\int_H f \overset{\mathbf{(5p)}}{=} \int_1^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{r}\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\mathbf{(3p)}}{=} 2\pi\int_1^3 2r\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \overset{\mathbf{(2p)}}{=} 2\pi\left[r^2\right]_{r=1}^3\left[-\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \overset{\mathbf{(1p)}}{=} 16\pi$$

*** 2. feladat (12 pont)**

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}\big(x\mapsto f'(2x+3)\big)$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. 1. megoldás. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(x))(\omega) = \mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad \mathbf{(4p)}$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(x+3))(\omega) = e^{3\mathbf{i}\omega}\mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad \mathbf{(4p)}$$
$$\mathscr{F}\big(x\mapsto f'(2x+3)\big)(\omega) = \frac{1}{2}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\cdot\mathbf{i}\frac{\omega}{2}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\mathbf{i}\omega}{4}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \mathbf{(4p)}$$

2. megoldás. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+3))(\omega) \overset{\mathbf{(4p)}}{=} \frac{1}{2}\mathscr{F}(x\mapsto f'(x+3))\left(\frac{\omega}{2}\right) \overset{\mathbf{(4p)}}{=} \frac{1}{2}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(x\mapsto f'(x))\left(\frac{\omega}{2}\right) \overset{\mathbf{(4p)}}{=}$$
$$= \frac{\mathbf{i}\omega}{4}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

3. megoldás. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x \mapsto f'(2x+3))(\omega) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}\mathscr{F}\left(x \mapsto 2f'(2x+3)\right)(\omega) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}\mathbf{i}\omega\mathscr{F}(x \mapsto f(2x+3))(\omega) \overset{(\mathbf{3p})}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{i}\omega}{2}\mathscr{F}(x \mapsto f(x+3))\left(\frac{\omega}{2}\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{\mathbf{i}\omega}{4}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

---

3. feladat (12 pont)
Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}.$$

Számítsuk ki $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ határértékét (amennyiben létezik)! (Segítség: először bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton növő, és a 2 felső korlátja.)

Mo. Először teljes indukcióval belátjuk, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő. $a_1 = \sqrt{2}$, tehát $a_0 \le a_1$ **(1p)** . Tegyük fel, hogy $a_n \le a_{n+1}$ teljesül valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát a sorozat monoton növő **(1p)** .

Megmutatjuk, hogy a sorozatnak a 2 felső korlátja: $a_0 \le 2$ **(1p)** , tegyük fel, hogy $a_n \le 2$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{3} \le 2 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak a 2 felső korlátja **(1p)** .

Mivel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens **(1p)** , jelölje a határértékét A. Ekkor $a_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $\sqrt{1+a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+A}$, következésképpen

$$A = \sqrt{1+A} \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 1 + A \quad (\mathbf{1p}),$$

így $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **(1p)** . Mivel $a_1 = 1$ és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, ezért $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(1p)** .

---

4. feladat (5+5=10 pont)

a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$ *b)* $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = ?$

Mo. *a)* Parciális integrálással **(1p)** :

$$\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b)

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\ln|\cos(x)| + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

---

5. feladat (16 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

Mo. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\} \quad (\mathbf{2p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)** . Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2p}),$$

azaz $H_f(0,0)$ indefinit, $H_f(1,1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(3p)**, következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f-nek, és az $(1,1)$ pontban pedig lokális minimuma van **(2p)** .

---

6. feladat (12 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}(x+2)^n$$

Mo. Legyen $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{1}{3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \quad (\mathbf{2p}),$$

azaz az együttható-sorozat konvergenciasugara 3 **(2p)** , a végpontokban pedig divergens **(2p)** , tehát a konvergenciatartomány $]-5,1[$ **(2p)** .

---

7. feladat (4+10=14 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk a lokális szélsőértékek létezésének szükséges feltételéről szóló tételt ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetére).

Mo. *Tétel.* Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, és $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$. Ha f totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, és f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$. **(4p)**

Bizonyítás. Legyen $i \in \{1,2,\dots,n\}$, valamint $\underline{e}_i$ az i-edik standard bázisvektor $\mathbb{R}^n$-ben, és jelölje φ azt a függvényt, amelyre

$$\operatorname{Dom}(\varphi) := \{t \in \mathbb{R} \mid \underline{a} + t\underline{e}_i \in \operatorname{Dom}(f)\} \quad \text{és} \quad \varphi(t) := f(\underline{a} + t\underline{e}_i) \quad (t \in \operatorname{Dom}(\varphi)). \quad (\mathbf{3p})$$

Ekkor φ-nek lokális szélsőértéke van a 0 pontban **(2p)** , és itt differenciálható **(1p)** , tehát $\varphi'(0) = 0$ **(1p)** . Ugyanakkor $\varphi'(0) = \partial_i f(\underline{a})$ **(2p)** . Mivel i tetszőleges volt ezért $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ is teljesül **(1p)** .