

1. Többváltozós függvények

1. Bevezetés

Ennek a fejezetnek a célja a kétváltozós függvények vizsgálata, ami során a 3-dimenziós felületeket szeretnénk megérteni.

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt n -változós valós függvénynek hívjuk.

Az n -változós valós függvény másik jelölése:

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{ahol } w, x_i \in \mathbb{R}$$

Speciális esetek:

1. Kétváltozós függvények: $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, azaz

$$z = f(x, y)$$

Ezt az x, y, z 3-dimenziós térben ábrázolva egy felületet kapunk. Néhány természetes kérdés ezzel kapcsolatban:

- Határozzuk meg a felület egy P_0 pontjában az érintősíkot!
- Határozza meg a felület lokális minimumait és maximumait!
- Határozza meg a felület és az xy sík közötti térrész térfogatát!

2. Háromváltozós függvények: $D \subset \mathbb{R}^3$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, azaz

$$w = f(x, y, z)$$

Egy természetes kérdés ezzel kapcsolatban:

Legyen $f(x, y, z)$ a D térrész sűrűségfüggvénye. Mekkora D tömege?

2. Felületek megadása térben

A felületek megadására három módszert ismertetünk:

1. Explicit megadási mód:

$$z = f(x, y),$$

azaz a felület pontjai

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

Példák:

- $z = x + y$: sík, melynek egy pontja: $P_0(0, 0, 0)$, normálvektora: $n = (1, 1, -1)$

- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: 90° -os nyílásszögű kúp, z szimmetriatengellyel az xy sík felett.

A fenti kúp egy z tengellyel rendelkező forgásszimmetrikus alakzat. Általában a z szimmetriatengelyű forgásszimmetrikus alakzat arról ismerhető fel, hogy

$$z = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

alakú és ekkor ez az xz síkban lévő $z = g(x)$ függvény z tengely körüli megforgatásával kapható meg.

Például a fenti kúp esetén $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ezért $g(x) = x$, így az xz síkban lévő $z = x, x \geq 0$ félegyenes megforgatásával kapjuk a felületet, ami egy kúp.

- $z = x^2 + y^2$: szintén egy forgásfelület, ahol $g(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 + y^2$, ezért $g(x) = x^2$, így az xz síkban lévő $z = x^2, x \geq 0$ félpárolba megforgatásával kapjuk a felületet, ami egy ún. forgásparaboloid.

2. Implicit megadási mód: $F(x, y, z) = 0$, azaz a felület pontjai:

$$\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$$

Példák:

- $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$: O középpontú R sugarú kör
- $z^2 - x^2 - y^2 = 0$: z szimmetriatengelyű mindkét irányban végtelen, 90° os nyílásszögű kúp
- $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$: egyköpenyű hiperboloid

3. Paraméters megadási mód. Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$. Legyen $r_1 : T \rightarrow \mathbb{R}$, $r_2 : T \rightarrow \mathbb{R}$, $r_3 : T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. A felület:

$$\{(r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) : (u, v) \in T\}$$

Példák:

- $(5 \cos u, 5 \sin u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 10$: z szimmetriatengelyű $r = 5$ sugarú $0 \leq z \leq 10$ közt lévő henger palástja
- Hogyan paraméterezhetjük az R sugarú O középpontú gömböt?

Ha az xz síkban adott az $(r_1(u), r_2(u))$, $a \leq u \leq b$ paraméterezésű görbe, akkor ezt a z tengely körül megforgatva az

$$\{(r_1(u) \cos v, r_1(u) \sin v, r_2(u)) : a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

paraméterezésű felületet kapjuk.

A fenti gömbhöz az xz síkban lévő $(R \sin u, R \cos u)$, $0 \leq u \leq \pi$ félkört megfigyelve jutunk. Így a gömb paraméterezése:

$$\{(R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u) : \\ 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

3. Határérték, parciális derivált

Ebben a fejezetben a kétváltozós valós függvények vizsgálatához szükséges alapfogalmakat, tételeket adjuk meg.

2. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $(x_0, y_0) \in D$ az $f(x, y)$ függvény belső pontja, ha létezik olyan (x_0, y_0) középpontú kör, mely benne van D -ben.

3. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a D tartomány nyílt, ha minden $(x_0, y_0) \in D$ pont belső pont.

4. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezve az (x_0, y_0) körüli kicsi körön legfeljebb az (x_0, y_0) t kivéve. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y)$ függvény határértéke az L szám, ha minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ szám úgy, hogy

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

ha

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Jelölés: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$

Példák:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/4, \pi/4)} \sin(x + y) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 1$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$

mert

$$|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0| = |\frac{x^2}{x^2 + y^2}| |y| \leq |y|,$$

ezért $\delta = \epsilon$ választás megfelelő.

3. A

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

határérték nem létezik, mert ha $y = mx$ egyenes mentén közelítjük meg az O -t, akkor

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{1}{1 + m^2},$$

ami ugyan állandó, de különböző m -ek esetén különböző.

A folytonosság fogalma hasonló az egyváltozós függvények esetén ltátható:

5. definíció. Az $f(x, y)$ függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha

1. létezik a $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$

2. létezik a $f(x_0, y_0)$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

6. definíció. Az $f(x, y)$ függvény folytonos, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

Az egyváltozós függvényeknél megszokott tulajdonságok érvényesek a határérték és folytonos függvényekre, amikor összeadunk, kivonunk, számmal szorzunk stb.

4. Parciális derivált

Legyen az $f(x, y)$ függvény egy belső pontja (x_0, y_0) . Tekintsük az xy síkban lévő $y = y_0$ egyenesnek az értelmezési tartományba eső részét. Ennek a képe a felületen lévő görbe, mely az

$$\{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

síkban vannak. Ennek a görbének az (x_0, y_0) pontban vett érintőjének meredekségét az egyváltozós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan értelmezzük:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Hasonlóan: tekintsük az xy síkban lévő $x = x_0$ egyenesnek az értelmezési tartományba eső részét. Ennek a képe a felületen lévő görbe, mely az

$$\{(x_0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

síkban vannak. Ennek a görbének az (x_0, y_0) pontban vett érintőjének meredekségét az egyváltozós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan értelmezzük:

$$m = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

7. definíció. Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontjában vett x szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

és y -szerinti parciális deriváltja:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Jelölés: x -szerinti parciális derivált (x_0, y_0) -ban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0)$$

y -szerinti parciális derivált (x_0, y_0) -ban:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{vagy} \quad f'_y(x_0, y_0)$$

Az x -szerinti parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy y -t konstansnak tekintjük és x -szerint, mint változó szerint deriválunk az egyváltozós függvényeknél megszokott szabályok szerint. Hasonlóan, az y -szerinti parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy x -t konstansnak tekintjük és y -szerint, mint változó szerint deriválunk az egyváltozós függvényeknél megszokott szabályok szerint.

Példák:

1. $f(x, y) = x^2y + xy^3$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2$$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}e^x$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y)^{-1/2}2xe^x + \sqrt{x^2 + y}e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y)^{-1/2}e^x$$

3. $f(x, y, z) = x^3y^2 \sin(x + z^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 \sin(x + z^2) + x^3y^2 \cos(x + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y \sin(x + z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y^2 \cos(x + z^2)2z$$

Mejegyzés: A parciális deriváltak létezéséből nem következik a folytonosság, mint azt az

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } xy \neq 0 \\ 1 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

A második parciális deriváltakat az első parciális derivált továbbderiválásával kapjuk:

8. definíció. Az $f(x, y)$ függvény x -szerinti második parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

Hasonlóan kapjuk a további három második parciális deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

Példa: $f(x, y) = x^2 + xy^2 + x^3y^2 + y^3$. Ekkor

$$f'_x = 2x + y^2 + 3x^2y^2$$

$$f'_y = 2xy + 2x^3y + 3y^2$$

$$f''_{xx} = 2 + 6xy^2$$

$$f''_{yx} = 2y + 6x^2y$$

$$f''_{xy} = 2y + 6x^2y$$

$$f''_{yy} = 2x + 2x^3 + 6y$$

A példában $f''_{yx} = f''_{xy}$. Ez általában is igaz:

1. tétel (Young). Ha $f(x, y)$ és parciális deriváltjai $f'_x, f'_y, f''_{yx}, f''_{xy}$ léteznek egy olyan nyílt tartományon, ami tartalmazza az (x_0, y_0) pontot, és valamennyi folytonos az (x_0, y_0) pontban, akkor

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Az egyváltozós függvényeknél a derivált fogalma a következőt jelentette: ha

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

akkor

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x,$$

ahol $\epsilon \rightarrow 0$, amint $\Delta x \rightarrow 0$.

Ennek mintájára igaz az alábbi tétel:

2. tétel. Tegyük fel, hogy $f(x, y)$ parciális deriváltjai léteznek egy T nyílt tartományon, mely tartalmazza az (x_0, y_0) pontot és tegyük fel, hogy f'_x és f'_y folytonosak (x_0, y_0) -ban. Ekkor az $f(x, y)$ függvény változása

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

kifejezhető

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

alakba, ahol $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$, amint $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ mindkétten.

Ez motiválja az alábbi definíciót:

9. definíció. Tegyük fel, hogy $f(x, y)$ értelmezve van egy (x_0, y_0) pontot tartalmazó nyílt tartományon. Az $f(x, y)$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$ létezik, és

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

alakba, ahol $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$, amint $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ mindkettőn. Az $f(x, y)$ függvényt differenciálhatónak mondjuk, ha az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható.

Tehát

3. tétel. Ha az $f(x, y)$ függvény f'_x és f'_y parciális deriváltjai folytonosak egy nyílt T halmazon, akkor $f(x, y)$ differenciálható a T minden pontjában.

A folytonosság definíciójából könnyen látszik az alábbi tétel:

4. tétel. Ha $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor ott folytonos.

5. Iránymenti derivált, érintősík

Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartománya a $D \subset \mathbb{R}^2$ és legyen az $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ görbe D -ben. Ekkor a

$$w = f(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

egy egyváltozós valós függvény. Ennek deriváltjáról szól az ún. láncszabály:

5. tétel (Láncszabály). Ha az $f(x, y)$ függvény f'_x, f'_y parciális deriváltjai folytonosak és $x(t), y(t)$ differenciálható függvényei t -nek, továbbá az $(x(t), y(t))$ görbe az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományában található, akkor a

$$w = f(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

egyváltozós valós függvény deriváltja:

$$\frac{dw}{dt} = f'_x(x(t), y(t))\dot{x} + f'_y(x(t), y(t))\dot{y}$$

vagy másképp

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Példa: számítsuk ki a láncszabállyal és közvetlenül is az $f(x, y) = xy$ függvény t szerinti deriváltját az $(x(t), y(t)) = (\cos t \sin t)$ görbe mentén!

A parciális deriváltak mintájára tekintsük az alábbi kérdést. Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja (x_0, y_0) , és legyen $\underline{v} = (v_1, v_2)$ egy $|\underline{v}| = 1$ vektor. Tekintsük az (x_0, y_0) ponton átmenő \underline{v} irányvektorú egyenesnek azt a részét, mely az értelmezési tartományba esik. Ez a felületen meghatároz egy görbét.

Kérdés: Mekkora ennek a görbének az (x_0, y_0) ponthoz tartozó meredeksége?

Megoldás: A kérdésre a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

határérték adja meg. Ezt a láncszabállyal számljuk ki, ahol

$$x(t) = x_0 + v_1 t$$

$$y(t) = y_0 + v_2 t$$

A láncszabály az alábbi adja:

$$m = f'_x(x_0, y_0)v_1 + f'_y(x_0, y_0)v_2$$

10. definíció. Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartományának egy belső pontja (x_0, y_0) és $\underline{v} = (v_1, v_2)$ egy $|\underline{v}| = 1$ vektor. Ekkor az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontjában vett \underline{v} irányú iránymenti deriváltja:

$$f'_x(x_0, y_0)v_1 + f'_y(x_0, y_0)v_2$$

Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$

Példa: Legyen $f(x, y) = x^2 + xy^3$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, és $\underline{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Ekkor

$$f'_x = 2x + y^3,$$

$$f'_y = 3xy^2,$$

ezért

$$f'_x(1, 2) = 10,$$

$$f'_y(1, 2) = 12,$$

így

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1, 2) = 10 * \frac{3}{5} + 12 * \frac{4}{5} = 15,6$$

11. definíció. Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ függvény mindkét parciális deriváltja létezik az (x_0, y_0) pontban. Ekkor a

$$\text{grad}f = (f'_x, f'_y)$$

vektort gradiensvektornak hívjuk.

A gradiensvektor egy másik jelölése: ∇f

A gradiensvektort használva az iránymenti derivált az alábbi skalárszorzatként is írható:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \text{grad}f \underline{v}$$

Kérdés: Melyik irányba kapjuk a legnagyobb iránymenti deriváltat, azaz merre emelkedik legjobban a felület?

Megoldás: Jelölje γ a $\text{grad}f$ és a \underline{v} vektorok közti szöveget. Ekkor a skalárszorzat definíciója szerint:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = |\text{grad}f| |\underline{v}| \cos \gamma = |\text{grad}f| \cos \gamma,$$

ami akkor maximális, ha $\gamma = 0$, azaz, ha \underline{v} a *gradf* irányába mutató egységvektor.

Hasonlóan okoskodva kapjuk, hogy a legkisebb iránymenti deriváltat $-gradf$ irányába kapjuk.

Feladat: Határozza meg az $f(x, y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjához tartozó érintősíkot!

Megoldás: A sík egyenletének meghatározásához egy pontra és a normálvektorra van szükség. Most egy pontját ismerjük, a normálvektort kell meghatározunk.

Ha ismerjük a sík két nem párhuzamos vektorát, akkor ezek vektoriális szorzata lesz a normálvektor. Nyilván az érintősíkban lesz az x - ill y -szerinti parciális deriváltnál bevezetett felületi görbék érintővektorai. Ezek:

$$\begin{aligned}\underline{v}_x &= (1, 0, f'_x) \\ \underline{v}_y &= (0, 1, f'_y)\end{aligned}$$

Ekkor a vektoriális szorzat:

$$\underline{v}_x \times \underline{v}_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1),$$

ezért ennek (-1) -szerese jó lesz normálvektornak:

$$\underline{n} = (f'_x, f'_y, 1),$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Példa: $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2$ érintősíkja $(2, 1)$ -ben

Az érintősík

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

alakba is írható, ahol a jobboldalt az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) -ban vett elsőrendű Taylor-polinomjának mondjuk.

6. Kétváltozós függvény lokális szélsőértéke

12. definíció. Az $f(x, y)$ függvény egy (x_0, y_0) belső pontjában lokális minimuma (maximuma) van, ha létezik egy olyan (x_0, y_0) -t tartalmazó kis kör, hogy minden abban lévő (x, y) pont esetén $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

Megjegyzés: Ha egy (x_0, y_0) pontban szélsőérték van és ott létezik érintősík, akkor ott az vízszintes, ami azt jelenti, hogy

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

13. definíció. At $f(x, y)$ függvény egy kritikus pontja az (x_0, y_0) , ha vagy

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

vagy legalább az egyik parciális derivált nem létezik.

Megjegyzés. Tehát szélsőérték csak kritikus pontban lehet.

At $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontban vett másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \\ &\quad f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2)\end{aligned}$$

Ha

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

akkor

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \\ &\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2) + \\ &\quad \text{"pici"}\end{aligned}$$

ahol a "pici" jelentése az, hogy ha Δx és Δy elég kicsi, akkor ez a rész elhanyagolhatóan kicsi az összegben szereplő tagokhoz képest, ezért a felület szélsőértékeinek meghatározásánál ezzel nem kell foglalkozni, elég eldöntenünk azt, hogy a másodrendű Taylor-polinomnak van-e szélsőértéke (x_0, y_0) -ban.

Tudjuk, hogy ha van szélsőértéke, akkor

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

és $f(x_0, y_0)$ csak a magasságot határozza meg, ezért elég az

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 = \\ (\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right)\end{aligned}$$

kifejezést megvizsgálunk a szélsőérték szempontjából. A szorzat második tényezője $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ben egy másodfokú polinom. Ez állandó előjelű, ha a diszkrimináns negatív. Most a diszkrimináns:

$$(2f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Emiatt ha

$$(2f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

és

1. $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \right) \geq 0,$$

így (x_0, y_0) -ban lokális minimum van

2. $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0) \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) \leq 0,$$

így (x_0, y_0) -ban lokális maximum van.

Ha a diszkrimináns pozitív, azaz

$$(2f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0,$$

akkor

$$(\Delta x)^2 \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + f''_{yy}(x_0, y_0) \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right)$$

értéke pozitív és negatív is lesz, emiatt nem lesz szélsőérték, ekkor azt mondjuk, hogy (x_0, y_0) pont nyeregpont.

Összefoglalva: a lokális szélsőértékek megkeresése két lépésből áll $f(x, y)$ mindenhol legalább kétszer parciálisan differenciálható függvények esetén:

1. Megkeressük a kritikus pontokat az

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

egyenletrendszer megoldásával. Így kapjuk a $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ pontokat.

2. Felírjuk az ún. Hesse-determinást:

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

és megvizsgáljuk a P_i pontokban.

(a) Ha

$$H(x_i, y_i) > 0$$

akkor

- i. $f''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ esetén lokális minimum van P_i -ben
- ii. $f''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ esetén lokális maximum van P_i -ben

(b)

$$H(x_i, y_i) < 0,$$

akkor nincs szélsőérték, ún. nyeregpont van.

(c) Ha

$$H(x_i, y_i) = 0,$$

akkor további vizsgálatra van szükség.

Példák:

1. Határozza meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$ szélsőértékeit!

(a)

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x^3 + 4y = 0, \\ f'_y &= 4y^3 + 4x = 0 \end{aligned}$$

megoldásai: $P_1 = (-1, 1), P_2(0, 0), P_3(1, -1)$.

(b)

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x^2 \\ f''_{xy} &= 4 \\ f''_{yy} &= 12y^2, \end{aligned}$$

ezért

$$H = 144x^2y^2 - 16.$$

Innen

i.

$$P_1: \quad H(-1, 1) = 128 > 0, f''_{xx}(-1, 1) = 12 > 0,$$

ezért lokális minimum P_1 -ben

ii.

$$P_2: \quad H(0, 0) = 16 < 0,$$

ezért nyeregpont van P_2 -ben.

iii.

$$P_3: \quad H(1, -1) = 128 > 0, f''_{xx}(1, -1) = 12 > 0,$$

ezért lokális minimum van P_3 -ban.

2. Határozza meg az R sugarú félgömbből kivágható legnagyobb térfogatú téglatest oldalainak hosszát (feltesszük, hogy minden csúcs a felszínen van).

Megoldás: A félgömböt egy félgömbhöz és egy körlemez határolja. Legyen a téglatest körlemezen lévő lapjának oldalai: x, y . Ekkor a Pitagorasztételből kapjuk, hogy a harmadik oldal:

$$z = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}},$$

tehát a téglatest térfogata

$$V = V(x, y) = xy \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

Ennek maximumát keressük meg.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} - \frac{x^2 y}{4 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} - \frac{xy^2}{4 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}} = 0$$

Ennek - figyelembe véve, hogy $x, y > 0$ - a megoldása

$$x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}R,$$

és a Hesse-determináns felírása után látszik, hogy itt maximum van.

3. Legkisebb négyzetek módszere: Határozza meg az $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ pontokat legjobban közelítő

$$Ax + B$$

egyesben szereplő A, B értékeket, ahol a legjobb közelítést a

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (Ax_i + B))^2$$

minimálissá tételével szeretnénk elérni.

Megoldás: Legyen

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^n (y_i - (Ax_i + B))^2$$

Ennek a minimumát kell meghatároznunk. Ehhez

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (Ax_i + B))(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (Ax_i + B))(-1) = 0$$

Az egyenleteket (-2) -vel osztva kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - A \sum_{i=1}^n x_i^2 - B \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - A \sum_{i=1}^n x_i - Bn = 0$$

Ezt az A, B -ben lineáris egyenletrendszert megoldva a következőt kapjuk:

$$A = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i) - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$B = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - A \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

(b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B \partial A} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} = \sum_{i=1}^n n$$

Ezért

$$H = n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0$$

(ez az ún. számtani-négyzetes egyenlőtlenség, ha nem minden x_i megegyezik.)

7. Kétváltozós függvény feltételes szélsőértéke

Az alapfeladat a következő: Adott az $f(x, y)$ függvény, melynek értelmezési tartománya: $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen Γ egy D -ben lévő görbe. Ekkor az $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Gamma\}$ egy térbeli görbe lesz. Ennek a görbének szeretnénk a szélsőértékeit meghatározni.

Ezt a következőképpen tesszük: a Γ görbét definiáló egyenletet $g(x, y) = 0$ alakba írjuk. Ezek után felírjuk az ún. Lagrange-féle multiplikátort:

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

majd kiszámoljuk a $h(x, y, \lambda)$ mindhárom parciális deriváltját és megnézzük, hogy ezek hol lesznek mind nullával egyenlők. Így pár ponthoz jutunk: $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$. Ezeket pontokat és ha ez nem egy zárt görbe, akkor a görbe végpontjait is behelyettesítve az $f(x, y)$ függvénybe kiválasztjuk a legnagyobb és legkisebb értékeket. Ezek adják a maximumot és a minimumot.

Példák:

1. Határozza meg az $f(x, z) = x + y$ függvény maximumát és minimumát az $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ körön!

Megoldás: A 0-ra rendezett feltétel: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Így a Lagrange-féle multiplikátor:

$$h(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

A $h(x, y, \lambda)$ parciális deriváltjai:

$$h'_x = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$h'_y = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$h'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Az első két egyenletből kapjuk, hogy $x = y$, amit a λ -szerinti deriváltba helyettesítve kapjuk, hogy $2x^2 - 1 = 0$, azaz $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Így két pontot kapunk: $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ és a $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ pontokat. Az itteni függvényértékek: $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ és $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$. Így az $f(x, y)$ függvény origó középpontú egységkörön felvett legkisebb értéke $-\sqrt{2}$, amit a $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ -ben vesz fel és a legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, amit a $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ -ben vesz fel.

2. Határozza meg Lagrange-féle multiplikátort használva, hogy az $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ hiperbola melyik pontja van legközelebb az origóhoz!

Megoldás: Az (x, y) pont origótól való távolsága $\sqrt{x^2 + y^2}$, ezért a feladat úgy is fogalmazható, hogy az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényt szeretnénk minimalizálni a hiperbolán. A hiperbola egyenletét nullára rendezve következő feltételt kapjuk: $g(x, y) = xy - 1 = 0$. Így a Lagrange-féle multiplikátor:

$$h(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda(xy - 1).$$

A parciális eriváltakat felírva a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$h'_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}2x + \lambda y = 0$$

$$h'_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}2y + \lambda x = 0$$

$$h'_\lambda = xy - 1 = 0$$

Az első egyenletből kapjuk:

$$\lambda = -\frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}},$$

a második egyenletből pedig

$$\lambda = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

egyenlőség jön. Így

$$\lambda = -\frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}},$$

amiből $x^2 = y^2$, tehát az $x > 0$ feltétel miatt $x = y$ adódik. Ezt behelyettesítve a λ szerinti parciális deriváltba $x^2 - 1 = 0$ lesz, így $x = y = 1$ jön ki. Még azt kellene megmutatnunk, hogy ez tényleg maximum, de erre nem adunk módszert, ezzel most nem foglalkozunk.