1. Végtelen sorok

1. Bevezetés és definíciók

Bevezetésként próbáljunk meg az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

végtelen összegnek értelmet adni. Mivel végtelen sokszor nem tudunk összeadni, emiatt csak az első n tagot adjuk össze: legyen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}},$$

a mértani sor összegképlete szerint. Ha n nagy, akkor $\frac{1}{2^n}$ már elhanyagolhatóan kicsi, ezért $s_n \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, emiatt természetes azt mondani, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2.$$

A továbbiakban

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$$

alakú ún. végtelen sorokat vizsgálunk, ahol a_n-ek valós számok. Ezt a végtelen mértani sort a következőképpen jelöljük: $\sum a_n$.

1. definíció (Végtelen sor konvergenciája)**.** A $\sum a_n$ végtelen sor n-edik részletösszege:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ha a részletösszegek sorozata az L számhoz konvergál, azaz

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L,$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens és összege L. Egyébként a végtelen sort divergensnek mondjuk.

Példa: 1. Mutassa meg, hogy az

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

végtelen sor konvergens és összege 1.

Megoldás: Legyen

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Mivel $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ezért

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Innen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

2. Az

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \dots$$

$|q| < 1$ esetén konvergens, egyébként divergens, mert

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad \text{ha } q \neq 1$$

és $q^n \to 0$ akkor és csak akkor, ha $|q| < 1$.

Megjegyzés: A konvergencia difiníciójából látszik, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciáján nem változtat az, ha véges számú tagot hozzáadunk vagy ha elveszünk.

1. tétel (Műveletek sorokkal)**.** Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, továbbá $\sum a_n = A$ és $\sum b_n = B$, akkor

1. $\sum (a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum (a_n - b_n) = A - B$
3. $\sum k a_n = kA$, ahol k tetszőleges valós szám.

Bizonyítás: Csak 1.-et bizonyítjuk. A $\sum (a_n + b_n)$ n-edik részletösszege:

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n + B_n.$$

Mivel $A_n \to A$ és $B_n \to B$, ezért $s_n \to A + B$. ■

Példa: Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ sorozat összegét!
Megoldás:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{6}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{6}} = \frac{3}{2},$$

a mértani sor összegképlete alapján.

2. Konvergenciakritériumok

A $\sum a_n$ végtelen sorral kapcsolatban két kérdés fogalmazható meg:

1. Konvergens-e a $\sum a_n$ végtelen sor?
2. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor mi az összege?

Az alábbi tétel egy szükséges feltételt ad a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciájára:

2. tétel. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bizonyítás: Nyilván

$$a_n =$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) =$$

$$s_n - s_{n-1}$$

Mivel a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$$

valamely valós L szám esetén. Így

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} =$$

$$L - L = 0 \quad \blacksquare$$

Következmény: Ha a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik vagy nem véges, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

Példák:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ végtelen sor divergens, mert $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ végtelen sor divergens, mert nem létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$.

Ha a $\sum a_n$ végtelen sor esetén $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor lehet, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, de lehet, hogy divergens.

Példák:

1. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ végtelen sor konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens, mert

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq$$

$$1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2},$$

ezért a részletösszegek sorozata a $+\infty$-hez tart.

A sorozatoknál tanultuk, hogy egy monoton növő sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos. Ennek a tételnek a következménye az alábbi:

3. tétel. Legyen $a_n \geq 0$ minden pozitív egész n esetén. Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha az s_n részletösszegek sorozata korlátos.

A következő kritérium azt mutatja, hogy gyakran a végtelen sort egy alkalmas impproprius integrállal összehasonlítva megválaszolhatjuk a konvergencia kérdését.

4. tétel (Integrákritérium)**.** Legyen a_n csupa pozitív tagból álló sorozat. Tegyük fel, hogy van olyan pozitív egész N és az $[N, \infty)$ félegyenesen csökkenő $f(x)$ függvény, amelyre $a_n = f(n)$ minden $n \geq N$ esetén. Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor és az $\int\limits_N^{\infty}$ impproprius integrál vagy egyszerre konvergens vagy divergens.

Bizonyítás: A bizonyításban az $N = 1$ esetre szorítkozunk (az általános eset bizonyítása hasonlóan történik). Mivel $f(x)$ csökkenő, ezért $\int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \geq a_k \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx$, ha $k \geq 2$. Ezért egyrészt

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx =$$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx$$

másrészt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq$$

$$a_1 + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx =$$

$$a_1 + \int_1^{n+1} f(x)dx$$

azaz

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

Ebből látszik, hogy ha az $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ konvergens, ami most azt jelenti, hogy felülről korlátos, akkor s_n is felülről korlátos lesz, tehát konvergens. Másrészt, ha $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ divergens, akkor $\int\limits_1^{n} f(x)dx$ nem lesz alulról korlátos, ezért s_n sem, tehát $\sum a_n$ is divergens. $\blacksquare$

Példa: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$, mivel $f(x) = \frac{1}{x^p}$ függvény monoton csökkenő ha $x \geq 1$; $f(n) = \frac{1}{n^p}$ és az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál a p-szabály alapján konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $0 < p \leq 1$.

5. tétel (Összehasonlító kritérium)**.** Legyen $\sum a_n$ olyan végtelen mértani sor, ahol $a_n \geq 0$.

1. Ha van olyan konvergens $\sum c_n$ sor és N pozitív egész, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \leq c_n$, akkor $\sum a_n$ végtelen sor is konvergens. (Majoráns kritérium)
2. Ha van csupa nemnegatív tagból álló divergens $\sum d_n$ végtelen sor és N pozitív egész szám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \geq d_n$, akkor $\sum a_n$ sor divergens. (Minoráns kritérium)

Bizonyítás: 1. Az $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $(n \geq N)$ részletösszegre felső korlát a

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

konvergens végtelen sor.

2. A $\sum a_n$ végtelen sornak nincs felső korlátja, mert ha lenne, akkor a

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

felső korlátja lenne $\sum d_n$ részletösszegeinek, tehát $\sum d_n$ is konvergens lenne, ami ellentmondás. ■

Példa

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ sor konvergens, mert $0 \leq \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ végtelen sor konvergens.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n} + 1}$ végtelen mértani sor divergens, mert $\frac{1}{n-\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens.

6. tétel (Limeszes összehasonlító kritériumok)**.** Tegyük fel, hogy valamely pozitív egész N-re igaz, hogy $a_n > 0$ és $b_n > 0$, ha $n > N$. Ekkor

1. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergensek.
2. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.
3. ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens.

Bizonyítás. Csak 1.-et bizonyítjuk. A feltétel miatt létezik egy M egész, hogy $n > M$ esetén $|\frac{a_n}{b_n} - c| < \frac{c}{2}$, azaz

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n.$$

Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum \frac{3c}{2} b_n$ is az, ezért az összehasonlító kritérium alapján $\sum a_n$ sor is az. Ha $\sum b_n$ sor divergens, akkor $\sum \frac{c}{2} b_n$ is az, emiatt az összehasonlító kritérium alapján $\sum a_n$ is divergens. ■

Példák

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - \ln n}$ sor konvergens, mert $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2 - \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = 2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens.
2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$ végtelen sor divergens, mert $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ végtelen sor divergens.

7. tétel (Hányadoskritérium)**.** Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergense;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy $\rho < 1$. Ekkor létezik r, amelyre $\rho < r < 1$ és N pozitív egész, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, ha $n \geq N$. Ekkor

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < r \quad \Leftrightarrow \quad a_{N+1} < r a_N$$

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r \quad \Leftrightarrow \quad a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N$$

és általában
$$a_{N+m} < r^m a_N.$$

Ekkor s_n felülről becsülhető a

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots =$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \dots)$$

konvergens sorral, így $\sum a_n$ is konvergens.

2. Ha $\rho > 1$, akkor létezik N, hogy $n \geq N$ esetén
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$
ezért
$$a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \dots$$
ezért a sorozat tagjai nem tartanak a 0-hoz, így a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

3. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorokra teljesül, hogy $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ és az első egy divergens, a második pedig egy konvergens sor. ■

Példák

1. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ végtelen sor konvergens, mert $a_n = \frac{2^n}{n!}$ és $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, ezért
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

2. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ végtelen sor divergens, mert $a_n = \frac{2^n}{n^2}$ és $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ és így
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2 > 1.$$

8. tétel (Gyökkritérium)**.** Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$
Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergense;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás:

1. Ha $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$, akkor egy rögzített $\rho < r < 1$ esetén létezik N, hogy $\sqrt[n]{a_n} < r$, azaz
$$a_n < r^n,$$
ha $n \geq N$, alkalmas pozitív egész N esetén. Meg kell mutatnunk, hogy $s_n, \quad (n \geq N)$ felülről korlátos. Nyilván:
$$s_n = a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n <$$
$$a_1 + \cdots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \cdots + r^n \leq$$
$$a_1 + \cdots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \cdots \leq$$
$$a_1 + \cdots + a_{N-1} + \frac{r^N}{1-r}. \quad ■$$

2. Ha $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho > 1$, akkor létezik N, hogy $\sqrt[n]{a_n} > 1$, ha $n \geq N$, ezért $a_n > 1$, ha $n \geq N$ és így $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ezért a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

Példa: A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ végtelen sor konvergens, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$

A következő tételben ún. alternáló sorokkal foglalkozunk. Legyenek $a_n > 0$. Ekkor az
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + -$$
váltakozó előjelű végtelen sort alternáló sornak mondjuk.

9. tétel (Leibniz-kritérium)**.** A fenti alternáló sor konvergens, ha a_n monoton csökkenő és $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. A $2m$-edik részletösszeg:
$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$
Ekkor
$$s_{2(m+1)} = s_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}),$$
ahol a monoton csökkenés miatt $(a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq 0$. Igy az s_{2m} sorozat monoton növő. Másrészt
$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$
$$\leq a_1,$$
megint csak a monoton csökkenés miatt. Mivel s_{2m} monoton nő és felülről korlátos, emiatt létezik a $\displaystyle\lim_{m\to\infty} s_{2m}$. De
$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (s_{2m} + a_{2m+1}) =$$
$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m},$$

ezért létezik a véges $\lim_{n\to\infty} s_n$. ■

Példa: A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -$$

alternáló sor konvergens, mert $a_n = \frac{1}{n}$ monoton csökkenve tart a 0-hoz.

2. definíció. A $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

Példa A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \dots$$

végtelen sor a Leibniz kritérium szerint konvergens, és a tagok abszolút értékét véve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

is konvergens sor lesz az integrál kritérium szerint, tehát az eredeti sor abszolút konvergens.

3. definíció. A $\sum a_n$ konvergens végtelen sor feltételesen konvergens, ha $\sum |a_n|$ divergens.

Példa A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

sor a Leibniz-kritérium szerint konvergens, de a tagok abszolút értékét véve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ún. harmonikus sor már divergens lesz az integrál-kritérium alapján.

10. tétel. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor konvergens is

Bizonyítás. Legyen

$$c_n = a_n + |a_n|.$$

Ekkor

$$0 \le c_n \le 2|a_n|$$

Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, emiatt $\sum 2|a_n|$ is konvergens és így az összehasonlító kritérium alapján $\sum c_n$ is konvergens végtelen sor. De

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n| = c_n - |a_n|$$

és mivel két konvergens végtelen sor különbsége is konvergens, emiatt $\sum a_n$ is konvergens. ■