

# 1. Vektorterek

## 1. Bevezetés, definíció és altér

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n = \underline{b},$$

ahol az  $\underline{a}_i$  vektorok ún.  $m$ -dimenziós euklideszi vektorok. Az ilyen vektorok összességét  $\mathbb{R}^m$ -mel jelöljük. Ezek összeadását és skalárral való szorzását a  $\mathbb{R}^m$ -ben megszokott módon komponensenként végezzük el.

Ennek a fejezetnek a célja, hogy a  $\mathbb{R}^m$ -ben vektorokat általánosítsuk, ebben az általánosításban a koordinátatengelyeket megértsük, és elérjük, hogy lehetőleg merőleges koordinátatengelyekkel rendelkezünk. Az általánosított tér neve vektortér:

**1. definíció.** Legyen  $V$  egy nemüres halmaz, amelyen két műveletet értelmezünk:

- összeadás: minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -hez hozzárendelünk egy  $\underline{u} + \underline{v}$ -vel jelölt  $V$ -beli elemet;
- skalárral való szorzás: minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{u} \in V$ -hoz hozzárendelünk egy  $\alpha\underline{u}$  szintén  $V$ -beli elemet.

Ha ezek a műveletek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal, akkor  $V$ -t valós vektortérnek mondjuk:

- minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén  $\underline{u} + \underline{v} \in V$
- minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén  $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- minden  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$  esetén  $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
- létezik nullelem:  $\underline{0}$ : minden  $\underline{v} \in V$  esetén  $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ ;
- létezik inverz: minden  $\underline{v} \in V$  esetén létezik  $-\underline{v}$ :  $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$ ;
- minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{u} \in V$  esetén  $\alpha\underline{u} \in V$ ;

- minden  $\underline{v} \in V$  esetén  $1\underline{v} = \underline{v}$ ;
- minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  és  $\underline{v} \in V$  esetén  $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$ ;
- minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  és  $\underline{v} \in V$  esetén  $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$ ;
- minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén  $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$ .

Példák vektortérre:

- A valós komponensű  $m$ -dimenziós vektorok tere ( $\mathbb{R}^m$ ) a szokásos összeadással, skalárral szorzással.
- A valós komponensű  $m \times n$ -es mátrixok tere ( $\mathbb{R}^{m \times n}$ ) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A legfeljebb  $n$ -edfokú valós együtthatós polinomok tere ( $P_n$ ) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A legfeljebb  $n$ -edfokú valós együtthatós trigonometrikus polinomok tere ( $T_n$ ) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén folytonos  $f(x)$  függvények tere, ahol  $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ , és  $(cf)(x) = cf(x)$ .
- A konvergens  $\sum a_n$  végtelen sorok a megismert összeadásra, skalárral való szorzásra.

Az alábbi tételek az axiómákból könnyen kiolvashatók:

- 1. tétel.** 1. Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén  $\lambda\underline{0} = \underline{0}$ .
- Minden  $\underline{v} \in V$  esetén  $0\underline{v} = \underline{0}$ .
  - Minden  $\underline{v} \in V$  esetén  $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ .

**Bizonyítás:** Csak 1.-et bizonyítjuk, a többi bizonyítása hasonlóan történik:

A 4. axióma szerint:

$$\lambda(\underline{v} + \underline{0}) = \lambda\underline{v},$$

ahol a bal oldal a 10. axióma szerint

$$\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0} = \lambda\underline{v}.$$

Az 5. axióma szerint van a  $\lambda\underline{v}$ -nek ellentettje, amit balról mindkét oldalhoz hozzáadva kapjuk:

$$-(\lambda\underline{v}) + (\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0}) = -(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v} = \underline{0}.$$

A 3. axióma szerint a baloldalt a következőképpen csoportosíthatjuk:

$$(-(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v}) + \lambda\underline{0} = \underline{0},$$

ami az 5. axióma szerint

$$\underline{0} + \lambda\underline{0} = \underline{0}.$$

Végezetül a 4. axióma szerint

$$\lambda\underline{0} = \underline{0}. \quad \blacksquare$$

**2. definíció.** A  $V$  vektortér  $W$  részhalmaza altér, ha  $W$  részhalmaza  $V$ -nek és maga is vektortér a  $V$ -beli műveletekkel.

Két alteret biztosan tudunk: magát a  $V$ -t és a  $\{0\}$ . Ezeket triviális altérnek mondjuk.

Egy  $V$  vektortérben lévő  $W$  részhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha az összeadásra és a skalárral való szorzásra zárt.

**2. tétel.** A  $W$  valódi altér  $V$ -ben akkor és csak akkor, ha

1. minden  $\underline{u}, \underline{v} \in W$  esetén  $\underline{u} + \underline{v} \in W$
2. minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{v} \in W$  esetén  $\alpha \underline{v} \in W$ .

**Bizonyítás:** Ha  $W$  altér, akkor az 1. és 6. axiómák szerint 1. és 2. teljesül.

Ha minden  $\underline{u}, \underline{v} \in W$  esetén  $\underline{u} + \underline{v} \in W$  és minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{v} \in W$  esetén  $\alpha \underline{v} \in W$ , akkor az 1. és 6. axiómák nyilván teljesülnek. Mivel 2., 3., 7., 8., 9., 10. axiómák igazak  $V$ -ben, tehát most is. Mivel  $0 \in \mathbb{R}$ , ezért  $\underline{v} \in V$  esetén  $0 \underline{v} = \underline{0} \in W$ , tehát van nullelem  $W$ -ben, ami 4.-et bizonyítja. Mivel  $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ , ezért ellentettünk is van, ami 5.-öt bizonyítja. ■

Példák altérre:

1.  $\mathbb{R}^3$ -ben az origón átmenő síkok és egyenesek valódi alteret alkotnak.
2.  $\mathbb{R}^m$ -ben az olyan vektorok, amelyek utolsó koordinátája 0.
3. A mindenhol folytonos függvények vektortérében azok a függvények, amelyek mindenhol deriválhatók.
4. Legyen  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Ekkor a

$$V = \{\underline{x} : x \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{A}x = \underline{0}\}$$

altér  $\mathbb{R}^n$ -ben.

5. Legyen  $V$  egy vektortér és  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$ . Ekkor

$$\{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

halmaz altér  $V$ -ben. A  $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$  összeget lineáris kombinációnak hívják. Ezt a vektorteret a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$  vektorok által generált altérnek hívják. Jelölés:

$$\text{lin}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}.$$

Megmutatható, hogy ez a legszűkebb olyan altér amely tartalmazza  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$  vektorokat. Például  $\mathbb{R}^3$ -ben a  $\underline{v}_1 = (1, 0, 0)$  és  $\underline{v}_2 = (0, 1, 0)$  vektorok által generált altér az  $xy$  sík.

Az  $\mathbb{R}^3$ -ben minden  $\underline{v}$  vektor egyértelműen írható

$$\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$$

alakba. Ezt általánosítja az alábbi fogalom:

**3. definíció.** A  $V$  vektortérben a  $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$  vektorok bázist ( $B$ ) alkotnak, ha minden  $\underline{v} \in V$  vektor egyértelműen írható

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

alakba, ahol  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .

Példák:

- (a)  $\mathbb{R}^m$ -ben bázis:

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ezt  $\mathbb{R}^m$  természetes bázisának hívjuk.

- (b)  $\mathbb{R}^2$ -ben bázisok:

- i. természetes bázis:

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii. egy másik bázis:

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (c)

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}^m\}$$

bázisa:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$$

**4. definíció.** A  $V$  vektortérnek a  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_m \in V$  vektorok generátorrendszere ( $G$ ), ha

$$\text{lin}\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_m\} = V,$$

azaz minden  $\underline{v} \in V$  vektor

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{g}_1 + \alpha_2 \underline{g}_2 + \dots + \alpha_m \underline{g}_m$$

alakba írható.

Példák:

- (a)  $\mathbb{R}^3$ -ben  $G$ :

$$\underline{g}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{g}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{g}_3 = (0, 0, 1).$$

- (b)  $P_n$ -ben  $G$ :

$$\underline{g}_1 = 1, \quad \underline{g}_2 = x, \underline{g}_3 = x^2, \dots, \underline{g}_{n+1} = x^n.$$

Ha

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = V$$

és egy vektor pl.  $v_m$  felírható a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1},$$

akkor

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \\ & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_{m-1} + \\ & \lambda_m (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}) = \\ & (\lambda_1 + \lambda_m \mu_1) \underline{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_m \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + \\ & + (\lambda_{m-1} + \lambda_m \mu_{m-1}) \underline{v}_{m-1}, \end{aligned}$$

ezért

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\} = V$$

**5. definíció.** A  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in V$  vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$

egyenlet csak a triviális

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

esetben teljesül.

Példa:  $\mathbb{R}^4$ -ben a

$$v_1 = (3, 2, 0, 4), \quad v_2 = (4, 3, 2, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1, 1)$$

vektorok lineárisan függetlenek.

**3. tétel.** Legyen  $V$  egy vektortér. A  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $b_i \in V$  akkor és csak akkor bázisa  $V$ -nek, ha

- (a)  $B$  lineárisan független
- (b)  $B$  generátorrendszere  $V$ -nek.

**Bizonyítás** A definíció szerint ha

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

bázisa  $V$ -nek, akkor az  $L$  és  $G$  is.

A másik irányú állításhoz tegyük fel, hogy  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$   $G$  és  $L$ . Ekkor minden vektor felírható a  $b_i$ -k lineáris kombinációjaként, csak azt kell igazolni, hogy a felírás egyértelmű. Ehhez tegyük fel, hogy van egy  $v \in V$  vektor, amely kétféleképpen is fölírható:

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

és

$$v = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$$

Ekkor

$$\underline{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + (\lambda_2 - \mu_2) b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) b_n,$$

ahonnan a lineáris függetlenség miatt azt kapjuk, hogy  $\lambda_i = \mu_i$ , ellentmondás. ■

A  $V$  vektorteret véges dimenziósnek mondjuk, ha van véges sok vektort tartalmazó bázisa; egyébként a vektortér végtelen dimenziós. Mi csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha a  $V$  vektortér véges dimenziós, akkor két bázisnak ugyanannyi az elemszáma. Ez az alábbi tétel alapul:

**4. tétel.** Ha az

$$\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$$

$V$  vektortérbeli vektorok lineárisan függetlenek és

$$\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_k$$

vektorok  $V$  generátorrendszerét alkotják, akkor

$$n \leq k.$$

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy  $n > k$  és ellentmondást abból kapunk, hogy megmutatjuk, hogy a

$$\lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_n \underline{f}_n = \underline{0}$$

egyenletnek nem csak triviális (minden  $\lambda_i = 0$ ) megoldása van.

Mivel  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_k$  generátorrendszert alkot, emiatt

$$\begin{aligned} \underline{f}_1 &= a_{11} \underline{g}_1 + a_{21} \underline{g}_2 + \dots + a_{k1} \underline{g}_k \\ \underline{f}_2 &= a_{12} \underline{g}_1 + a_{22} \underline{g}_2 + \dots + a_{k2} \underline{g}_k \\ &\vdots \\ \underline{f}_n &= a_{1n} \underline{g}_1 + a_{2n} \underline{g}_2 + \dots + a_{kn} \underline{g}_k, \end{aligned}$$

alkalmas  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  konstansokkal. Ekkor

$$\underline{0} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_n \underline{f}_n =$$

$$\lambda_1 (a_{11} \underline{g}_1 + a_{21} \underline{g}_2 + \dots + a_{k1} \underline{g}_k) +$$

$$\lambda_2 (a_{12} \underline{g}_1 + a_{22} \underline{g}_2 + \dots + a_{k2} \underline{g}_k) +$$

⋮

$$\lambda_n (a_{1n} \underline{g}_1 + a_{2n} \underline{g}_2 + \dots + a_{kn} \underline{g}_k) =$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n}) \underline{g}_1 +$$

$$(\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n}) \underline{g}_2 +$$

⋮

$$(\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn}) \underline{g}_k.$$

Ez biztosan teljesül, ha az együtthatók 0-k, azaz:

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn} &= 0. \end{aligned}$$

Mivel feltettük, hogy  $n > k$ , ezért ennek - a  $\lambda_i$ -ket tekintve ismeretleneknek -, homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása, ami ellentmondás. ■

**5. tétel.** Ha a véges dimenziós vektortérnek  $B_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  és  $B_2 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$  bázisai, akkor  $n = m$

**Bizonyítás:** Mivel  $B_1$  bázis, ezért generátorrendszer is és mivel  $B_2$  bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$n \geq m$$

Másrészt mivel  $B_2$  bázis, ezért generátorrendszer is és mivel  $B_1$  bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$m \geq n.$$

Ez alapján

$$n = m \quad \blacksquare$$

Most már tudjuk értelmezni a vektortér dimenzióját:

**6. definíció.** Ha  $V$  egy véges dimenziós vektortér, akkor egy bázisban lévő vektorok számát a vektortér dimenziójának mondjuk. Jelölés:  $\dim V$ .

Példák:

- (a)  $\dim \mathbb{R}^m = m$
- (b)  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$
- (c)  $\dim P_n = n + 1$

A következő tétel egy aránylag könnyen ellenőrizhető feltételt ad arra, hogy ha tudjuk, hogy  $\dim V = n$ , akkor eldöntsük, hogy adott  $n$  db vektor bázist alkot-e.

**6. tétel.** Tegyük fel, hogy a  $V$  vektortérré  $\dim V = n$ . Ekkor

- (a) ha  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  vektorok lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak;
- (b) ha  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  vektorok generátorrendszert, akkor egyben bázisok.

**Bizonyítás:** a. Tegyük fel, hogy a  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  vektorok lineárisan függetlenek. Azt kell megmutatnunk, generátorrendszert alkotnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem alkot generátorrendszert, azaz létezik  $\underline{v} \in V$ , amelyre

$$\underline{v} \neq \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n.$$

Ekkor a

$$\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$$

vektorok lineárisan független rendszert alkotnak, mert ha

$$\mu_0 \underline{v} + \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

akkor  $\mu_0 = 0$  esetén

$$\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

ami csak triviális módon lehet, mivel  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  vektorok lineárisan függetlenek.

Míg ha  $\mu_0 \neq 0$ , akkor

$$\underline{v} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} \underline{v}_1 - \dots - \frac{\mu_n}{\mu_0} \underline{v}_n,$$

ami nem lehetséges.

Ellentmondást úgy kapunk, hogy egy  $n$  dimenziós vektortérben van olyan generátorrendszer (egy bázis ilyen), amelyik  $n$  vektort tartalmaz, és itt nem lehet  $n + 1$  lineárisan független vektor.

b. Ha  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  generátorrendszert alkot, akkor azt kell megmutatnunk, hogy egyben lineárisan független rendszer is. Ha nem így lenne, akkor lenne egy  $\underline{v}_i$  vektor, amely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ekkor

$$V = \text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n\},$$

ezért  $V$ -nek van  $n - 1$  vektort tartalmazó generátorrendszere, ami ellentmondás, mert van  $n$  vektort tartalmazó független vektorrendszer. ■

Mivel legtöbbször az  $\mathbb{R}^m$  térben dolgozunk, ezért most megmutatjuk, hogyan határozhatjuk meg itt

$$\text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$$

egy bázisát: Írjuk a vektorokat mint sorvektorok egymás alá egy mátrixba, majd alkalmazzuk a Gauss-eliminációt. Meggondolható, hogy a Gauss-eliminációnál alkalmazott lépések során a generált altér nem változik. A Gauss-elimináció végén kapott mátrix nemnulla sorai adják a generált altér bázisát.

Példa: Határozza meg  $\mathbb{R}^4$  azon alterének egy bázisát, amelyet a

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \underline{v}_2 = (2, -1, 0, 3), \quad \underline{v}_3 = (3, 1, 3, 7).$$

A bázisok segítségével definiálhatjuk a koordináta fogalmát.

**7. definíció.** Ha a véges dimenziós  $V$  vektortér egy bázisa  $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ , akkor a  $\underline{v} \in V$  vektor koordinátája

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ ha}$$

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n.$$

Jelölés:  $(\underline{v})_B$ .

A következő példa mutatja, hogy miért van szükség különböző bázisokra:

Határozza meg azokat az  $(x, y)$  pontokat, amelyekre  $x^2 + xy + y^2 = 1$ .

A kérdés precízen a következő: Határozza meg az

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

természetes bázisban azon  $x\underline{i} + y\underline{j}$  vektorokat, amelyekre  $x^2 + xy + y^2 = 1$ .

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy más bázist választunk. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}$$

$$\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}.$$

Ha ebben az új bázisban egy pont koordinátája  $(x', y')$ , akkor

$$x' \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right) + y' \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right) =$$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \underline{i} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \underline{j}.$$

Ebben az új bázisban a feltétel így írható:

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) +$$

$$+ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 = 1,$$

azaz

$$\frac{3}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 = 1.$$

Mivel az új bázis a természetes bázis 45°-kal történő elforgatottja, emiatt a keresett halmaz egy olyan ellipszis, amelynek tengelyei az  $(\underline{i}, \underline{j})$  által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben 45° ill. 135°-ot zárnak be.

Az előző példa is mutatja, hogy meg kell határoznunk, hogy két  $V$ -beli bázis esetén az egyikben meghatározott koordinátákból hogyan kapjuk meg a

másik bázisban a koordinátákat. Ezt hívják báziscserének.

Legyen  $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$  és  $B' = \{\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_n\}$  két bázisa a  $V$  vektortérnek. Legyen  $\underline{v} \in V$  és legyen

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

azaz

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n.$$

és

$$(\underline{v})_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

azaz

$$\underline{v} = \beta_1 \underline{b}'_1 + \dots + \beta_n \underline{b}'_n.$$

Írjuk fel a  $\underline{b}_i$  vektorokat a  $\underline{b}'_i$  vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{b}_1 = a_{11} \underline{b}'_1 + a_{21} \underline{b}'_2 + \dots + a_{n1} \underline{b}'_n$$

$$\underline{b}_2 = a_{12} \underline{b}'_1 + a_{22} \underline{b}'_2 + \dots + a_{n2} \underline{b}'_n$$

⋮

$$\underline{b}_n = a_{1n} \underline{b}'_1 + a_{2n} \underline{b}'_2 + \dots + a_{nn} \underline{b}'_n$$

Ekkor

$$\underline{v} = \beta_1 \underline{b}'_1 + \dots + \beta_n \underline{b}'_n =$$

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n =$$

$$\alpha_1 (a_{11} \underline{b}'_1 + a_{21} \underline{b}'_2 + \dots + a_{n1} \underline{b}'_n) +$$

$$\alpha_2 (a_{12} \underline{b}'_1 + a_{22} \underline{b}'_2 + \dots + a_{n2} \underline{b}'_n) +$$

⋮

$$\alpha_n (a_{1n} \underline{b}'_1 + a_{2n} \underline{b}'_2 + \dots + a_{nn} \underline{b}'_n) =$$

$$(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n}) \underline{b}'_1 +$$

$$(\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{2n}) \underline{b}'_2 +$$

⋮

$$(\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \dots + \alpha_n a_{nn}) \underline{b}'_n,$$

azaz

$$\beta_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{2n}$$

⋮

$$\beta_n = \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \dots + \alpha_n a_{nn}$$

Jelölje

$$\underline{P} = \underline{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ekkor tehát

$$(\underline{v})_{B'} = \underline{P}_{B,B'}(\underline{v})_B$$

Tehát a  $\underline{P}_{B,B'}$  az az  $n \times n$ -es mátrixot, amelyik  $i$ -edik oszlopában a  $(b_i)_{B'}$  koordináták vannak. A  $\underline{P}_{B,B'}$  mátrixot átmenet mátrixnak hívjuk.

Ekkor

$$(\underline{v})_B = \underline{P}_{B,B'}^{-1}(\underline{v})_{B'},$$

ezért

$$\underline{P}_{B',B} = \underline{P}_{B,B'}^{-1}$$

Példa: Legyen  $\mathbb{R}^2$  két bázisa:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ekkor

$$\underline{P}_{B',B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

és innen

$$\underline{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát például a  $P(1,2)$  pont koordinátái  $B$ -ben  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és a megfelelő mátrixszorzás után a  $B'$ -beli koordináták  $\begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$  lesznek.

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \cdots + \underline{a}_nx_n = \underline{b}.$$

Ha az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  vektorok az  $\mathbb{R}^n$  bázisát alkotják és az  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  jelöli a természetes bázist  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor

$$\underline{b} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + \cdots + b_n\underline{e}_n.$$

Ha az  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  vektorok az  $\mathbb{R}^n$  bázisai, akkor az egyenletrendszer megoldását báziscseréként is felfoghatjuk. Ekkor az átmenetmátrix az együtthatómátrix lesz és az  $\underline{x} = \underline{A}\underline{b}$  megoldást kapjuk.

Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix esetén a sorvektorok  $\mathbb{R}^n$ -ből vannak. Az általuk generált altér a sortér; hasonlóan az oszlopvektorok  $\mathbb{R}^m$ -ből vannak. Az általuk generált altér az oszloptér. Megmuatható, hogy

$$\dim(\text{sortér}) = \dim(\text{oszloptér}).$$

**8. definíció.** Az  $\underline{A}$  mátrix rangja a sortér dimenziója. Jelölés:  $\text{rang}(\underline{A})$ .

Megmutatható, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

**7. tétel.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrixok esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

- $\underline{A}$  invertálható;
- az  $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$  egyenletrendszernek csak az  $\underline{x} = \underline{0}$  megoldása van;
- az  $\underline{A}$  elemi sorműveletekkel az  $\underline{I}_n$  egységmátrixszá transzformálható;
- az  $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$  minden  $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$  megoldható;
- $\det \underline{A} \neq 0$ ;
- $\text{rang}(\underline{A}) = n$ ;
- $\underline{A}$  sorai lineárisan függetlenek;
- $\underline{A}$  oszlopai lineárisan függetlenek.

A fenti  $\text{rang}(\underline{A})$  fogalom segítségével megadható egy szükséges és elégséges feltétel a lineáris egyenletrendszer megoldására:

**8. tétel.** Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az  $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldható;
- a  $\underline{b}$  az  $\underline{A}$  oszlopterében van;
- $\text{rang}(\underline{A}|\underline{b}) = \text{rang}(\underline{A})$

## 2. Skalárszorzos vektorterek

Az  $\mathbb{R}^3$ -ben megismert skalárszorzat mintájára természetes  $\mathbb{R}^n$ -ben a skalárszorzatot a következőképpen definiálni: Legyen

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Ekkor

$$\underline{u}\underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i$$

Können ellenőrizhető, hogy ez a skalárszorzat rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (a)  $\underline{u}\underline{v} = \underline{v}\underline{u}$ , minden  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (b)  $(\underline{u} + \underline{v})\underline{w} = \underline{u}\underline{w} + \underline{v}\underline{w}$  minden  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$
- (c)  $(\alpha\underline{u})\underline{v} = \alpha(\underline{u}\underline{v})$  minden  $\alpha \in \mathbb{R}, \underline{u}, \underline{v} \in V$
- (d)  $\underline{u}\underline{u} \geq 0$  és  $\underline{u}\underline{u} = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\underline{u} = \underline{0}$ .

Ennek általánosításaként vezetjük be a skalárszorzatot:

**9. definíció.** Egy  $V$  vektortérben skalárszorzatnak nevezünk egy olyan műveletet, amely bármely  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  ponthoz egy  $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$  valós számot (más néven skalár számot) rendel hozzá a következő tulajdonságokkal:

- (a)  $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ , minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ;
- (b)  $\langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$  minden  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$  esetén
- (c)  $\langle \alpha\underline{u}, \underline{v} \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$  minden  $\alpha \in \mathbb{R}, \underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén
- (d)  $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$  és  $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\underline{u} = \underline{0}$ .

Példák:

- (a)  $V = \mathbb{R}^n$ ,

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

- (b)  $V = \{f(x)\}$  :  
 $2\pi$  szerint periodikus folytonos függvény}:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

**10. definíció.** Ha  $V$  skalárszorzos vektortér vektortér, akkor egy  $\underline{v} \in V$  vektortér hossza:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$$

Példa:  $\mathbb{R}^n$ -ben legyen az  $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  és a skalárszorzat:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_iv_i.$$

Ekkor  $\underline{u}$  hossza:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Az  $\mathbb{R}^3$ -ben az

$$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektorok távolsága:

$$\|\underline{v} - \underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (v_i - u_i)^2}$$

Ennek általánosítása:

**11. definíció.** Ha  $V$  egy skalárszorzos vektortér, akkor  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  közötti távolság:

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{v} - \underline{u}\|.$$

A következő cél két vektor által bezárt szöveget értelmezni. Ehhez szükséges az alábbi tétel:

**9. tétel.** Legyen  $V$  egy skalárszorzos vektortér. Ekkor minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|.$$

**Bizonyítás:** Ha  $\underline{u} = \underline{0}$ , akkor mindkét oldal 0.

Tegyük fel, hogy  $\underline{u} \neq \underline{0}$ , akkor minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén

$$0 \leq \|\underline{v} - t\underline{u}\|^2 = \langle \underline{v} - t\underline{u}, \underline{v} - t\underline{u} \rangle =$$

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2t \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + t^2 \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle.$$

Mivel ez minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén igaz, ezért a diszkrimináns nem pozitív, tehát

$$4 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 - 4 \|\underline{u}\|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2 \leq 0,$$

ezért

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|. \quad \blacksquare$$

A korábban bevezetett hosszúságnak az alábbi tulajdonságai vannak:

- (a)  $\|\underline{u}\| \geq 0$
- (b)  $\|\underline{u}\| = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\underline{u} = \underline{0}$
- (c)  $\|\alpha\underline{u}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{u}\|$
- (d)  $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

(d) bizonyítása:

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \leq$$

$$\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| = (\|\underline{u} + \underline{v}\|)^2 \blacksquare$$

**12. definíció.** Legyen  $V$  egy skalárszorzatos vektortér. Az  $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ,  $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$  vektorok által bezárt szög  $\alpha$ , ahol

$$\cos \alpha = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}.$$

A fenti definíció értelemes, mert

$$\left| \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \right| \leq 1.$$

**13. definíció.** Az  $\underline{u}, \underline{v}$  vektorok ortogonálisak, ha

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0.$$

**10. tétel.** Ha  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorok ( $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ ) páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.

**Bizonyítás:** Legyen

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}.$$

Vegyük mindkét oldal  $\underline{v}_i$ -vel vett skalárszorzatát:

$$\langle \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle = \langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = 0.$$

Mivel tetszőleges  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén

$$\langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = \langle \alpha \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = \alpha \langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle,$$

ezért

$$\langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = 0.$$

De

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle &= \\ \langle \lambda_1 \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + \langle \lambda_2 \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \dots + \langle \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle &= \\ \lambda_1 \langle \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + \lambda_2 \langle \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \dots + \lambda_k \langle \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle &. \end{aligned}$$

Az ortogonalitás miatt

$$\langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ \|\underline{v}_i\|^2, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

ezért

$$\lambda_i \|\underline{v}_i\|^2 = 0,$$

tehát

$$\lambda_i = 0. \quad \blacksquare$$

Példa:  $T_n$ -ben az

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

függvények ortogonálisak a Fourier-soroknál tanultak szerint, ezért lineárisan függetlenek; továbbá nyilván generátorrendszert alkotnak így bázist is.

## 2.1. Ortogonális bázisok

**11. tétel.** Legyen  $V$  egy véges dimenziós, skalárszorzatos vektortér,  $\dim V = n$ . Ennek van olyan  $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$  bázisa, ahol a vektorok páronként ortogonálisak.

**Bizonyítás** A bizonyítás során használt algoritmust Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak hívják.

Legyen  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  egy bázisa  $V$ -nek. Legyen

$$\underline{b}_1 = \underline{v}_1.$$

A második bázisvektort a következő alakban keressük:

$$\underline{b}_2 = \underline{v}_2 + \alpha_{21} \underline{b}_1,$$

ahol azt akarjuk, hogy  $\underline{b}_1$  és  $\underline{b}_2$  ortogonálisak legyenek. Ekkor

$$0 = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 + \alpha_{21} \underline{b}_1 \rangle =$$

$$\langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 \rangle + \alpha_{21} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle,$$

ezért

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2}.$$

A következő bázisvektort

$$\underline{b}_3 = \underline{v}_3 + \alpha_{31} \underline{b}_1 + \alpha_{32} \underline{b}_2$$

alakban keressük. Azt akarjuk, hogy  $\underline{b}_3$  ortogonális legyen  $\underline{b}_1$  és  $\underline{b}_2$  vektorokra. Ezért

$$0 = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_3 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 + \alpha_{31} \underline{b}_1 + \alpha_{32} \underline{b}_2 \rangle =$$

$$\langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 \rangle + \alpha_{31} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle + \alpha_{32} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle.$$

Mivel  $\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = 0$ , ezért

$$\alpha_{31} = -\frac{\langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\alpha_{32} = -\frac{\langle \underline{b}_2, \underline{v}_3 \rangle}{\|\underline{b}_2\|^2}.$$

Ezt folytatva  $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$  páronként ortogonális vektorokhoz jutunk. Korábban bebizonyítottuk, hogy az ortogonalitásból következik a függetlenség, tehát dimenziószámnyi független vektort kaptunk, amiből következik, hogy bázist alkotnak.  $\blacksquare$

**14. definíció.** Ha a  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$  bázis olyan, hogy a benne szereplő vektorok páronként ortogonálisak és minden benne szereplő vektorra

$$\|\underline{b}_i\| = 1,$$

akkor  $B$ -t ortonormált bázisnak (ONB) hívjuk.



**12. tétel.** Ha  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  egy ortonormált bázis az  $V$ -ben, akkor  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén, ha

$$(\underline{u})_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

és

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= \\ \langle u_1 \underline{b}_1 + u_2 \underline{b}_2 + \dots + u_n \underline{b}_n, v_1 \underline{b}_1 + v_2 \underline{b}_2 + \dots + v_n \underline{b}_n \rangle &= \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle. & \end{aligned}$$

Mivel  $B$  ortonormált rendszer, ezért

$$\langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Innen

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad \blacksquare$$

**13. tétel.** Legyen  $B$  és  $B'$  két ortonormált bázis az  $n$  dimenziós  $V$  vektortérben. Ha  $\underline{P} = \underline{P}_{B, B'}$  a bázisátmenet mátrix, akkor  $\underline{P}^T = \underline{P}^{-1}$ .

**Bizonyítás:** Azt kell megmutatni, hogy

$$\underline{P}^T \underline{P} = \underline{I}_n.$$

Legyen

$$B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$$

Ekkor a  $\underline{P}^T$   $i$ -edik sorában a

$$(b_i)_{B'}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

és a  $\underline{P}$   $j$ -edik oszlopában a

$$(b_j)_{B'} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

lesz. Innen kapjuk, hogy  $\underline{P}^T \underline{P}$   $i$ -edik sorának  $j$ -edik oszlopában  $B'$  ONB tulajdonsága miatt

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle =$$

szerepel, ami  $B$  ONB volta miatt

$$= \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

a  $B_2$  ONB volta miatt, ami bizonyítja az állítást.  $\blacksquare$

**15. definíció.** Ha  $\underline{A}$  olyan  $n \times n$ -es mátrix, amelyre  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$ , akkor azt mondjuk, hogy  $\underline{A}$  ortogonális mátrix.

A definícióból látszik, hogy

**14. tétel.** Ha  $\underline{A}$  ortogonális  $n \times n$ -es mátrix, akkor a sorvektorai és oszlopvektorai is ONB-t alkotnak  $\mathbb{R}^n$ -ben.

### 3. Lineáris transzformáció

**16. definíció.** Legyen  $V$  és  $W$  vektorterek,  $T: V \rightarrow W$  pedig egy olyan függvény, amelyre

- (a)  $T(\underline{u} + \underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$ , minden  $\underline{u}, \underline{v} \in V$  esetén
- (b)  $T(\alpha \underline{u}) = \alpha T(\underline{u})$  minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\underline{u} \in V$  esetén.

Ekkor  $T$ -t lineáris transzformációnak nevezzük.

Példák:

- (a)  $\mathbb{R}^2$ :

- i. Vetítés az  $x$  tengelyre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ii. Tükrözés az  $y = x$  egyenesre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

- iii. Forgatás  $90^\circ$ -kal:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

- (b)  $\mathbb{R}^3$ :

- i. Tükrözés  $0 - ra$ :

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$$

- ii. Vetítés az  $xy$  síkra:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Legyen

$$V = \{f(x) : f(x) \text{ mindenhol deriválható}\}$$

$$W = \{f(x) : f(x) \text{ mindenhol értelmezett}\}$$

$$T(f(x)) = f'(x)$$

(d) Legyen  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $T(\underline{x}) = \underline{Ax}$ .

(e) Legyen az  $n$ -dimenziós  $V$  vektortér egy bázisa:  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ . Ekkor

$$T(\underline{v}) = (\underline{v})_B$$

egy lineáris leképezés.

(f) Legyen  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$   $n$ -dimenziós sorvektorok. Képezzük belőle az  $n \times n$ -es mátrixot. Ha az  $i$ -edik sort kivéve rögzítjük a sorvektorokat, akkor így egy

$$T(\underline{a}_i) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

függvényt kapunk. Ez egy lineáris transzformáció.

### 3.1. Magtér, képtér

**17. definíció.** A  $T : V \rightarrow W$  lineáris transzformáció magtere az összes olyan  $V$ -beli, vektor, amelynek a képe a  $\underline{0}$ :

$$\text{Ker}(T) = \{\underline{v} : \underline{v} \in V, T(\underline{v}) = \underline{0}\}.$$

A  $T : V \rightarrow W$  lineáris transzformáció képtere az összes olyan  $W$ -beli, vektor, amely előáll képként:

$$\text{Im}(T) =$$

$$\{\underline{w} : \underline{w} \in W, \text{ létezik } \underline{v} \in V, \text{ hogy } T(\underline{v}) = \underline{w}\}.$$

Példa: Legyen  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  az a lineáris transzformáció, amelyik az  $x, y$  síkra vetít. Ekkor a magtér a  $z$  tengely, azaz

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

a képtér pedig maga az  $x, y$  sík:

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Megmutatható az alábbi tétel:

**15. tétel.** Tetszőleges  $T : V \rightarrow W$  lineáris transzformáció esetén

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

### 3.2. Lineáris leképezések mátrixa

A lineáris leképezés definíciójából látszik, hogy tetszőleges  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in V$  vektorok és  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  valós számok esetén:

$$T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_m \underline{v}_m) =$$

$$T(\alpha_1 \underline{v}_1) + T(\alpha_2 \underline{v}_2) + \dots + T(\alpha_m \underline{v}_m) =$$

$$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \alpha_2 T(\underline{v}_2) + \dots + \alpha_m T(\underline{v}_m)$$

A továbbiakban csak  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformációval foglalkozunk. Legyen  $\mathbb{R}^n$  egy bázisa  $B$  és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  esetén

Legyen

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$(T(\underline{v}))_B = \left( \sum_{i=1}^n v_i T(\underline{b}_i) \right)_B = \sum_{i=1}^n v_i (T(\underline{b}_i))_B.$$

Tekintsük a következő  $n \times n$ -es mátrixot:

$$\underline{\underline{T}}_B = ((T(\underline{b}_1))_B, (T(\underline{b}_2))_B, \dots, (T(\underline{b}_n))_B).$$

Ekkor

$$(T(\underline{v}))_B = \underline{\underline{T}}_B (\underline{v})_B.$$

A  $\underline{\underline{T}}_B$  mátrixot a  $T$  lineáris transzformáció  $B$  bázisban vett transzformációmátrixának hívjuk. Példák:

(a)  $\mathbb{R}^2$ -ben  $60^\circ$ -kal forgatás az origó körül a természetes bázisban. Ekkor

$$T(\underline{e}_1) = \frac{1}{2} \underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{e}_1 + \frac{1}{2} \underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b)  $\mathbb{R}^2$ -ben tükrözés az  $x$  tengelyre a természetes bázisban. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 = 1 \underline{e}_1 + 0 \underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0 \underline{e}_1 + (-1) \underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c)  $\mathbb{R}^2$ -ben tükrözés az  $y$  tengelyre a természetes bázisban. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = \underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{T}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d)  $\mathbb{R}^2$ -ben tükrözés az origóra. Mivel

$$T(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + (-1)\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizhető, hogy egy vektorra előbb  $T_1$ , majd  $T_2$  transzformációt alkalmazva éppen  $T_3$  transzformációból származó vektort kapjuk. Ez a mátrixokra nézve a következőt jelenti:  $\underline{T}_2\underline{T}_1 = \underline{T}_3$ . Ez általában is igaz:

A definíció alapján könnyen látszik, hogy ha  $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformációk, akkor  $T_2(T_1(v))$  is lineáris transzformáció ( $T_3$ ) és teljesül rájuk, hogy

$$\underline{T}_2\underline{T}_1 = \underline{T}_3.$$

Hogyan kaphatjuk meg  $B$  és  $B'$  bázisok esetén  $\underline{T}_B$ -ből  $\underline{T}_{B'}$ -t? Tudjuk, hogy

$$(T(v))_B = \underline{T}_B(v)_B,$$

$$(T(v))_{B'} = \underline{T}_{B'}(v)_{B'}.$$

Jelölje  $\underline{P} = \underline{P}_{B,B'}$  a bázisátmenet mátrixot. Ekkor

$$(T(v))_{B'} = \underline{P}(T(v))_B = \underline{P}\underline{underline{T}_B(v)}_B = \underline{P\underline{T}_B\underline{P}^{-1}}(v)_{B'}$$

másrészt

$$(T(v))_{B'} = \underline{T}_{B'}(v)_{B'},$$

ami minden  $(v)_{B'}$  esetén teljesül, ezért

$$\underline{T}_{B'} = \underline{P}^{-1}\underline{T}_B\underline{P}.$$

### 3.3. Diagonalizálás

**18. definíció.** Ha  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$   $n \times n$ -es mátrixok és létezik  $\underline{P}$  invertálható  $n \times n$ -es mátrix, hogy

$$\underline{B} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P},$$

akkor  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$  mátrixokat hasonlóknak mondjuk.

A cél, hogy adott  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix esetén adjunk meg olyan  $\underline{P}$   $n \times n$ -es invertálható mátrixot, hogy  $\underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P}$ , szép legyen!

Mit értsünk "szép" mátrix alatt?

**19. definíció.** A  $\underline{D}$   $n \times n$ -es mátrix diagonális, ha a főátlón kívül minden elem 0, azaz

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ha

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{DE} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},$$

emiatt

$$\underline{D}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

**20. definíció.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$  mátrix diagonalizálható, ha létezik  $\underline{P}$  invertálható  $n \times n$ -es mátrix, amelyre egy diagonális  $\underline{D}$  mátrixra

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P}.$$

Próbáljunk adott  $\underline{A}$  mátrixhoz megfelelő  $\underline{P}$  mátrixot találni! A definíció alapján

$$\underline{PD} = \underline{AP}.$$

A  $\underline{P}$  oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor

$$\underline{PD} = (\lambda_1\underline{p}_1 | \lambda_2\underline{p}_2 | \dots | \lambda_n\underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{AP} = (\underline{Ap}_1 | \underline{Ap}_2 | \dots | \underline{Ap}_n),$$

ezért

$$\underline{Ap}_i = \lambda_i\underline{p}_i.$$

**21. definíció.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix sajátértéke a  $\lambda$  valós szám, ha létezik  $\underline{x} \neq \underline{0}$  vektor, hogy

$$\underline{Ax} = \lambda \underline{x}.$$

Ekkor  $\underline{x}$ -et sajátvektornak mondjuk.

Hogyan keressük meg a sajátértékeket, sajátvektorokat?

Nyilván

$$\begin{aligned} \underline{Ax} = \lambda \underline{x} &\Leftrightarrow \underline{Ax} = \lambda \underline{I}_n \underline{x} \Leftrightarrow \\ \underline{Ax} - \lambda \underline{I}_n \underline{x} = \underline{0} &\Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) \underline{x} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek pontosan akkor van nemtriviális ( $\underline{x} \neq \underline{0}$ ) megoldása, ha

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) = 0.$$

**22. definíció.** A

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

polinomot karakterisztikus polinomnak hívjuk.

Példák:

(a)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

sajátértékei, sajátvektorai ( $y = x$  egyenesre vetítés mátrixa a természetes bázisban)

(b) 45°-kal való forgatás mátrixa a természetes bázisban:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokkal már leírható, hogy egy  $n \times n$ -es mátrix mikor diagonalizálható:

**16. tétel.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van  $n$  db független sajátvektora.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix diagonalizálható, azaz létezik egy invertálható  $n \times n$ -es  $\underline{P}$  mátrix, amelyre

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P},$$

ahol

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{PD} = \underline{AP}.$$

A  $\underline{P}$  oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor oszlopvektorok szerinti felírásban

$$\underline{PD} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{AP} = (\underline{A} \underline{p}_1 | \underline{A} \underline{p}_2 | \dots | \underline{A} \underline{p}_n),$$

azaz  $\underline{p}_i$ -ik sajátvektorok ( $\underline{p}_i \neq \underline{0}$ , mert  $\underline{P}$  invertálható) és  $\underline{p}_i$ -k lineárisan függetlenek szintén az invertálhatóság miatt.

Most tegyük fel, hogy  $\underline{A}$ -nak létezik  $n$  db lineárisan független sajátvektora. Legyenek ezek:

$$\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n,$$

és

$$\underline{A} \underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

Legyen  $\underline{P}$  az a mátrix, amelynek oszlopvektorai  $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$ :

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

és legyen

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{AP} = (\underline{A} \underline{p}_1 | \underline{A} \underline{p}_2 | \dots | \underline{A} \underline{p}_n).$$

és

$$\underline{PD} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

így

$$\underline{AP} = \underline{PD}.$$

Mivel a  $\underline{p}_i$ -k lineárisan függetlenek, emiatt  $\underline{P}$  invertálható, ezért

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}. \quad \blacksquare$$

A fenti tétel szerint a diagonalizálás során az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrixhoz keresünk  $n$  db lineárisan független sajátvektort:

$$\underline{A} \underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

Ekkor

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

és

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

mátrixokkal

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}.$$

Példa: Diagonalizáljuk az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

mátrixot!

Megoldás:...

Mire használhatjuk a diagonalizálást? Ha az  $\underline{A}$  mátrix diagonalizálható, akkor könnyen számolható az  $\underline{A}$  hatványai:

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \Rightarrow \underline{A} = \underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1},$$

ezért

$$\begin{aligned} \underline{A}^m &= (\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) (\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) \dots (\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) = \\ &= \underline{P} \underline{D} (\underline{P}^{-1} \underline{P}) \underline{D} (\underline{P}^{-1} \underline{P}) \underline{D} \dots (\underline{P}^{-1} \underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) = \\ &= \underline{P} \underline{D}^m \underline{P}^{-1}, \end{aligned}$$

de ebben a szorzatban már mindent ismerünk.

A következő itt nem bizonyított tétel egy elégséges feltételt ad arra, hogy mikor diagonalizálható egy mátrix:

**17. tétel.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix diagonalizálható, ha  $\underline{A}$ -nak  $n$  db különböző sajátértéke van.

#### 4. Kvadratikus alakok

A sajátértékek alkalmazásaként végül olyan kérdéseket vizsgálunk meg, hogy az

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1$$

milyen görbét ír le a síkban és az

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 1$$

milyen felületet ír le a térben.

Először nézzük meg, hogyan kapcsolódik ez a lineáris algebrához!

Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + (a_{12} + a_{21})xy.$$

Ha

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz.$$

Általában, ha

$$\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + \dots$$

$$\dots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

A középiskolában tanultuk, hogy az

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

egyenlet vagy ellipszist vagy hiperbolát ír le. A célunk az, hogy egy

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

ún. kvadratikus alakban az  $x_i$ -ket úgy transzformáljuk:

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n, \quad 1 \leq i \leq n$$

amelyre

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{D} \underline{y}$$

teljesül valamely  $\underline{D}$  diagonális mátrixsal. Legyen

$$\underline{x} = \underline{P} \underline{y}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = (\underline{P} \underline{y})^T \underline{A} (\underline{P} \underline{y}) = \underline{y}^T \underline{P}^T \underline{A} \underline{P} \underline{y},$$

ezért

$$\underline{D} = \underline{P}^T \underline{A} \underline{P},$$

másrészt a diagonalizálás azt adja, hogy

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P},$$

ezért

$$\underline{P}^T = \underline{P}^{-1},$$

azaz  $\underline{P}$  ortogonális mátrix

**23. definíció.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$ -es mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha létezik egy  $\underline{P}$   $n \times n$ -es ortogonális mátrix, amelyre

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P},$$

valamely diagonális  $\underline{D}$  mátrix esetén. Bebizonyítható:

**18. tétel.** Az  $\underline{A}$   $n \times n$  mátrix ortogonálisan diagonalizálható, akkor és csak akkor, ha  $\underline{A}$  szimmetrikus mátrix.

Mivel minden kvadratikus alak felírható

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$+ 2a_{12}x_{12} + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

alakban, emiatt minden kvadratikus alakhoz található  $\underline{A}$  szimmetrikus mátrix, amelyre a kvadratikus alak

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

alakú, ezért minden kvadratikus alak diagonalizálható.

Hogyan diagonalizálható egy

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = 1$$

egyenlet?

(a) A kvadratikus alakot írjuk

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

alakba, ahol  $\underline{A}$  szimmetrikus mátrix

(b) Határozzuk meg azt a

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n)$$

mátrixot, amely ortogonálisan diagonalizálja  $\underline{A}$ -t. Ekkor

$$\underline{A} \underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

(c) Ekkor a  $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$  által meghatározott új koordináta-rendszerben a keresett egyenlet:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Példa:

(a) Határozza meg az

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

megoldását!

(b) Határozza meg az

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 1$$

megoldását!