

1. pótz h megoldások

1. Floridában az éjjel-nappali Walmartba betérő aligátorok száma Poisson eloszlású $\lambda = 1/\text{nap}$, az ugyanide látogató oposszumok száma $\lambda = 2/\text{nap}$. (Az aligátorok és az oposszumok függetlenek egymástól.)

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy déltől este 6-ig látunk legalább 2 aligátort? (2p)

Megoldás Legyen $A(t)$ a $t \geq 0$ napig látott aligátorok száma. Ekkor a feladat szerint $A(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda = 1$ intenzitással. Ekkor a déltől este 6-ig látott aligátorok száma

$$A\left(\frac{18}{24}\right) - A\left(\frac{12}{24}\right) = A\left(\frac{3}{4}\right) - A\left(\frac{1}{2}\right) \sim \text{Poi}\left(\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot 1\right) = \text{Poi}\left(\frac{1}{4}\right).$$

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(A\left(\frac{3}{4}\right) - A\left(\frac{1}{2}\right) \geq 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\left(\frac{3}{4}\right) - A\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1\right) = 1 - e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \approx 0.0265.$$

- (b) Mi lesz az állatok eloszlása egy napra nézve? (Eloszlás neve és paraméterei?) (2p)

Megoldás Legyen $N(t)$ a $t \geq 0$ napig látott állatok száma. Ekkor $N(t) = A(t) + O(t)$, ahol $O(t)$ a $t \geq 0$ napig látott oposszumok száma, ami egy Poisson-folyamat 2 intenzitással. Mivel ez két független Poisson-folyamat összege, így egy Poisson-folyamat lesz $\lambda = 1 + 2 = 3$ intenzitással. Ekkor az 1 nap alatt észlelt állatok száma

$$N(1) \sim \text{Poi}(1 \cdot 3) = \text{Poi}(3).$$

- (c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha du. 3-ig nem látunk egy állatot sem, akkor 4 után bukkan fel az első? (3p)

Megoldás Legyen τ két állat felbukkanása között eltelt idő napokban. Ekkor

$$\tau \sim \text{Exp}(3),$$

hiszen akkor az idő exponenciális ugyanazzal a paraméterrel, ami a megfelelő Poisson-folyamat intenzitása. Ekkor a keresett valószínűség az exponenciális örökifjúságát használva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau > \frac{16}{24} \mid \tau > \frac{15}{24}\right) &= \mathbb{P}\left(\tau > \frac{15}{24} + \frac{1}{24} \mid \tau > \frac{15}{24}\right) = \mathbb{P}\left(\tau > \frac{1}{24}\right) \\ &= 1 - (1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{24}}) = e^{-\frac{1}{8}} \approx 0.8825. \end{aligned}$$

- (d) Ha 5 és 6 között volt 3 állat, mi a valószínűsége, hogy ebből pontosan 1 oposszum volt? Mi az oposszumok eloszlása a 3 állat között? (Add meg az eloszlás nevét és paramétereit!) (3+2p)

Megoldás Mivel az oposszumok aránya az összes állathoz képest $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ és a három állat egymástól függetlenül volt oposszum vagy aligátor, így amennyiben X az oposszumok száma, akkor

$$X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.2222.$$

- (e) Mennyi a valószínűsége, hogy hétfőn a 4. aligátor valamikor este 6 után bukkan fel? (Ebbe azt is beleértjük, hogy nem bukkan fel aznap egyáltalán.) (3p)

Megoldás Az este hatig felbukkant aligátorok száma

$$A\left(\frac{18}{24}\right) = A\left(\frac{3}{4}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{3}{4} \cdot 1\right) = \text{Poi}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(A\left(\frac{3}{4}\right) \leq 3\right) = \sum_{k=0}^3 e^{-\frac{3}{4}} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{k!} \approx 0.9927.$$

- (f) Mennyi a valószínűsége, hogy ha délig volt 3 oposszum, akkor volt 4 is (éjféltől 12-ig)? (3p)

Megoldás Az oposszumok száma délig

$$O\left(\frac{12}{24}\right) = O\left(\frac{1}{2}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = \text{Poi}(1).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 4 \mid O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 3\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 4, O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 3\right)}{\mathbb{P}\left(O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 3\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 4\right)}{\mathbb{P}\left(O\left(\frac{1}{2}\right) \geq 3\right)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^3 e^{-1} \frac{1}{k!}}{1 - \sum_{k=0}^2 e^{-1} \frac{1}{k!}} \approx 0.2365. \end{aligned}$$

2. Egy átlagos oposszum üvöltése egyenletes eloszlású 100dB várható értékkel és 10/3 dB szórással.

- (a) Mi az oposszumok hangtartománya? Egy olyan műszeren mérünk, ami legfeljebb 100dB-t tud, és ez a műszer kiakad. Mi a valószínűsége, hogy az állat 105dB-nél is hangosabb volt? (3+2p)

Megoldás Tudjuk, hogy amennyiben X egy oposszum üvöltése dB-ben, akkor $X \sim \text{Uni}(a, b)$. Továbbá

$$100 = \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{és} \quad \frac{10}{3} = \mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Amiből az alábbi egyenletet kapjuk

$$a + b = 200$$

$$b - a = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Ami megoldva $a = 100 - \frac{10}{\sqrt{3}}$ és $b = 100 + \frac{10}{\sqrt{3}}$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X > 105 \mid X > 100) = \frac{\mathbb{P}(X > 105, X > 100)}{\mathbb{P}(X > 100)} = \frac{\mathbb{P}(X > 105)}{\mathbb{P}(X > 100)} = \frac{\frac{\frac{10}{\sqrt{3}} - 5}{2 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}}}{\frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}}} = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}} - 5}{\frac{10}{\sqrt{3}}} \approx 0.1340.$$

- (b) Kiválasztunk a populációból 10 oposszumot és megmérjük az üvöltésüket (minden mérés után visszaengedjük őket a természetbe). Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább 2, amelyik hangosabb 95dB-nél? (3p)

Megoldás Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott oposszum hangosabb 95dB-nél

$$\mathbb{P}(X > 95) = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}} + 5}{2 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}}} \approx 0.9330.$$

Ekkor mivel mind a 10 oposszum egymástól függetlenül ekkora valószínűséggel lesz hangosabb 95dB-nél, amennyiben H a 95dB-nél hangosabb oposszumok száma, akkor

$$H \sim \text{Bin}(10, 0.933).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(H \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(H \leq 1) = 1 - \binom{10}{0} (0.933)^0 (1 - 0.933)^{10} - \binom{10}{1} (0.933)^1 (1 - 0.933)^9 \approx 1.$$

- (c) A floridai oposszumok hangosabbak, mint az átlag, nekik 110dB és 130dB között van a hangerejük, még mindig egyenletes eloszlással. A floridai oposszumok teszik ki az egész populáció 10%-át,

a maradék 90% átlagos. Ha random választok egy oposszumot a populációból, mennyi a valószínűsége, hogy hangosabb lesz, mint 95 dB? Ha sikerült választanom egyet, amelyik hangosabb, mint 95dB, mi a valószínűsége, hogy az floridai volt? (4+2p)

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{az oposszum átlagos}\} \quad \text{és} \quad F = \{\text{az oposszum floridai}\}.$$

Ekkor tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = 0.9 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(F) = 0.1.$$

Továbbá amennyiben a Y a floridai oposszumok hangterjedelme dB-ben, akkor $Y \sim \text{Uni}(110, 130)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y > 95) = \frac{20}{20} = 1.$$

Ekkor amennyiben

$$C = \{\text{az oposszum hangosabb 95dB-nél}\},$$

akkor a mostani és az előző részfeladat számításai alapján tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(C | A) = 0.933 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(C | F) = 1.$$

Továbbá A és F teljes eseményrendszert alkot, mivel közülük pontosan az egyik következik be. Ekkor a teljes valószínűség tétele miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C | A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C | F) \cdot \mathbb{P}(F) \\ &= 0.933 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.1 \\ &\approx 0.9397. \end{aligned}$$

Másfelől Bayes-tétele alapján

$$\mathbb{P}(F | C) = \frac{\mathbb{P}(C | F)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \cdot 0.1}{0.9397} \approx 0.1064.$$

- (d) Van 10 átlagos és 3 floridai oposszumom, ha kijelölök közülük random 3-at, mi a valószínűsége, hogy az egy hangos csapat lesz, azaz lesz közöttük legalább 2 floridai? (3p)

Megoldás Mivel minden kijelölés valószínűsége azonos, így klasszikus valószínűségi mezővel számolhatunk. Ekkor a összes elemi esemény száma:

$$\binom{13}{3} = 286.$$

A kedvező elemi események száma, amikor pontosan 2 floridait vagy pontosan 3 floridait választunk ki:

$$\binom{10}{1} \binom{3}{2} + \binom{10}{0} \binom{3}{3} = 10 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 31.$$

A keresett valószínűség ekkor

$$\frac{31}{286} \approx 0.1084.$$

3. Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x) = c \cdot \frac{x}{x^2+1}$ ha $0 < x < 7$ és 0 egyébként.

- (a) Milyen c -re lesz ez egy sűrűségfüggvény? (3p)

Megoldás Az f függvény integráljának a teljes számegyenesen 1-nek kell lennie.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^7 c \cdot \frac{x}{x^2+1} dx = c \cdot \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{x=0}^{x=7} = \frac{1}{2} \ln(50) \cdot c.$$

Amiből

$$c = \frac{2}{\ln(50)} \approx 0.5112.$$

Továbbá ezzel a választással a függvény nemnegatív marad, így ez lesz a jó c .

(b) Mennyi lesz $\mathbb{P}(X > 5)$? (2p)

Megoldás A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 5) &= \int_5^\infty f(x) dx = \frac{2}{\ln(50)} \int_5^7 \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\ln(50)} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{x=5}^{x=7} = \frac{\ln(50) - \ln(26)}{\ln(50)} \approx 0.1672.\end{aligned}$$

(c) Mennyi lesz $\mathbb{E}(X)$? (3p)

Megoldás

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x) dx = \int_0^7 x \cdot \frac{2}{\ln(50)} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{2}{\ln(50)} \int_0^7 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\ln(50)} \int_0^7 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{2}{\ln(50)} [x - \arctan(x)]_{x=0}^{x=7} = \frac{14 - 2 \arctan(7)}{\ln(50)} \approx 2.8482.\end{aligned}$$

4. Egy folytonos X valószínűségi változónak a várható értéke és a szórása is 2. Melyiknél lesz nagyobb $\mathbb{P}(X > 3)$ ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ vagy ha $X \sim \text{Uni}(a, b)$? Mennyi lesz $\mathbb{P}(X > 3.5 | X > 2)$? (Mindkét típusú változóra válaszold meg!) (4+3p)

Megoldás Amennyiben $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, akkor

$$2 = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{és} \quad 2 = \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda},$$

amiből $\lambda = \frac{1}{2}$. Ekkor a keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 3}) = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.2231,$$

továbbá az örökifjúság miatt

$$\mathbb{P}(X > 3.5 | X > 2) = \mathbb{P}(X > 2 + 1.5 | X > 2) = \mathbb{P}(X > 1.5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1.5}) = e^{-\frac{3}{4}} \approx 0.4724.$$

Amennyiben $X \sim \text{Uni}(a, b)$, akkor

$$2 = \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{és} \quad 2 = \mathbb{D}(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Ekkor az alábbi egyenletrendszert kell megoldani

$$\begin{aligned}a + b &= 4 \\ b - a &= 2\sqrt{12}\end{aligned}$$

Innen pedig $a = 2 - \sqrt{12}$ és $b = 2 + \sqrt{12}$. Ekkor a keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(X > 3) = \frac{2 + \sqrt{12} - 3}{2\sqrt{12}} \approx 0.3557,$$

továbbá

$$\mathbb{P}(X > 3.5 | X > 2) = \frac{\mathbb{P}(X > 3.5, X > 2)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \frac{\mathbb{P}(X > 3.5)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \frac{\frac{2 + \sqrt{12} - 3.5}{2\sqrt{12}}}{\frac{2 + \sqrt{12} - 2}{2\sqrt{12}}} \approx 0.5670.$$

Innen az is látható, hogy $\mathbb{P}(X > 3)$, akkor lesz nagyobb, ha X egyenletes eloszlású.