

1. Gyakorlat

Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

Kombinatorika

- **Ismétlés nélküli permutáció:** n darab különböző elemet sorba rendezünk: $n!$
- **Ismétléses permutáció:** n darab elemet sorba rendezünk, de köztük $n_1, n_2, \dots, n_k$ darab egyforma: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
- **Ismétlés nélküli variáció:** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevételével: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- **Ismétléses variáció:** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevételével: n^k
- **Ismétlés nélküli kombináció:** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevétele nélkül: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- **Ismétléses kombináció:** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevétele nélkül: $\binom{n+k-1}{k}$

A klasszikus valószínűségi mező

- Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.
- Az elemi események halmaza az **eseménytér** (Ω).
- Az eseménytér (bizonyos) részhalmazait ($A \subseteq \Omega$) **eseményeknek** nevezzük.
- **Műveletek eseményekkel:**
 - $\mathbf{A \cap B}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül mindkettő bekövetkezik.
 - $\mathbf{A \cup B}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik.
 - $\mathbf{A^C}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.
 - $\mathbf{A \subseteq B}$: az A esemény maga után vonja a B eseményt
 - $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$: az A és B **kizáró események** (a kettő egyszerre nem következik be).
- **A valószínűség:**
 - $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ minden A eseményre
 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - Amennyiben $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró események

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- Amennyiben az eseménytér véges és minden elemi esemény egyforma valószínűséggel következik be (ez a **klasszikus valószínűségi mező**), akkor az A esemény valószínűsége

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Néhány hasznos azonosság

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ és $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
 - $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
 - $A \subseteq B$ esetén $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
 - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
 - $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
-

Feladatok

1. Hányféle (nem feltétlenül értelmes) szót kapunk az ABRACADABRA szó betűinek az összekeverésével?
2. 10 különböző ízű fagyalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtaakat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcsérbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? Amennyiben egy ízt akár többször is választhatunk?
3. Egy tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?
4. Hányféleképpen tud 10 ember egy kör alakú asztal köré leülni?
5. Egy dobozban van 7 zöld és 4 fehér golyó. Visszatevés nélkül kiveszünk hármat. Mennyi a valószínűsége, hogy az első kettő zöld és a harmadik fehér lesz?
6. Két dobókockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?
7. Az 1-től 1000-ig terjedő számok közül taláломra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 6-tal vagy 8-cal osztható?
8. Egy vizsgában 10 feleletválasztós kérdés van, 4-4 válaszlehetőséggel, mindegyik kérdésnél pontosan egy válasz a helyes. Egy vizsgázó tanulás nélkül véletlenszerűen kiválasztva tölti ki a feladatlapot (minden kérdésnél pontosan egy lehetőséget választ).
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyik kérdésre sem válaszol helyesen?
 - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább három kérdésre helyesen válaszol?
9. Az ötöslottó (5 darab különböző számot húznak 1 és 90 között) esetében számoljuk ki az alábbi valószínűségeket.
 - (a) Mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50.
 - (b) Mindegyik kihúzott szám páros.
 - (c) Mindegyik kihúzott szám 1 és 50 közötti páros szám.
 - (d) Van olyan szám, ami legfeljebb 50 vagy páros.
10. 10 ember (köztük Alice és Bob) véletlenszerűen leül
 - (a) egy padra.
 - (b) egy kör alakú asztal köré.Mennyi a valószínűsége, hogy Alice és Bob egymás mellé ül?
11. 10 házaspár táncolni ment. Mindenki pontosan egy ellenkező nemű emberrel táncolt. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 7 házaspár tagjai táncoltak egymással?