

1. Gyakorlat

Kombinatorika, klasszikus valószínűségi mező

Kombinatorika

- **Ismétlés nélküli permutáció:** n darab különböző elemet sorba rendezünk: $n!$
- **Ismétléses permutáció:** n darab elemet sorba rendezünk, de köztük $n_1, n_2, \dots, n_k$ darab egyforma: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
- **Ismétlés nélküli variáció:** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevételével: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- **Ismétléses variáció:** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevételével: n^k
- **Ismétlés nélküli kombináció:** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevétele nélkül: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- **Ismétléses kombináció:** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevétele nélkül: $\binom{n+k-1}{k}$

A klasszikus valószínűségi mező

- Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.
- Az elemi események halmaza az **eseménytér** (Ω).
- Az eseménytér (bizonyos) részhalmazait ($A \subseteq \Omega$) **eseményeknek** nevezzük.
- **Műveletek eseményekkel:**
 - $\mathbf{A \cap B}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül mindkettő bekövetkezik.
 - $\mathbf{A \cup B}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik.
 - $\mathbf{A^C}$: az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.
 - $\mathbf{A \subseteq B}$: az A esemény maga után vonja a B eseményt
 - $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$: az A és B **kizáró események** (a kettő egyszerre nem következik be).
- **A valószínűség:**
 - $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ minden A eseményre
 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - Amennyiben $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró események

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- Amennyiben az eseménytér véges és minden elemi esemény egyforma valószínűséggel következik be (ez a **klasszikus valószínűségi mező**), akkor az A esemény valószínűsége

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Néhány hasznos azonosság

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ és $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $A \subseteq B$ esetén $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Feladatok

1. Hányféle (nem feltétlenül értelmes) szót kapunk az ABRACADABRA szó betűinek az összekeverésével?

Megoldás Mivel összesen 11 betű áll rendelkezésre, de ezek között 5 darab A, 2 darab B és 2 darab R között nem teszünk különbséget, így összesen

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83\,160$$

féleképpen tudjuk őket sorba rendezni.

2. 10 különböző ízű fagylalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtaakat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcsérbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? Amennyiben egy ízt akár többször is választhatunk?

Megoldás

- Amennyiben mindegyikből csak egyet választunk, akkor

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

Illetve, ha tölcsérbe kérjük, akkor

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

- Amennyiben mindegyikből többet is választhatunk, akkor

$$\binom{10 + 3 - 1}{3} = \binom{12}{3} = 220.$$

Illetve, ha tölcsérbe kérjük, akkor

$$10^3 = 1\,000.$$

3. Egy tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?

Megoldás Kétféleképpen is meg tudjuk oldani.

- Először válasszuk ki, hogy a 20 hallgató közül kik kapják az 1-es érdemjegyet. Majd a maradék 16 hallgató közül azokat, akik a 2-es érdemjegyet kapják és így tovább. Ez összesen

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 305\,540\,235\,000.$$

- Most rögzítsük a hallgatók sorrendjét. Állítsuk párba melléjük a jegyeket. Mivel 20 jegyet kell kiosztani, de mindegyik érdemjegyből az 5-5 darab között nem teszünk különbséget, ezért ez összesen

$$\frac{20!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = 305\,540\,235\,000.$$

4. Hányféleképpen tud 10 ember egy kör alakú asztal köré leülni?

Megoldás Egy adott széktől kezdődően kezdjük el feltölteni a helyeket. Ez $10!$ féleképpen tudjuk megtenni. Azonban a forgásszimmetria miatt mivel önkényesen választottuk meg a kezdőpontot, minden lehetőséget 10-szer számoltunk meg, így összesen

$$\frac{10!}{10} = 9! = 362\,888.$$

5. Egy dobozban van 7 zöld és 4 fehér golyó. Visszatevés nélkül kiveszünk hármat. Mennyi a valószínűsége, hogy az első kettő zöld és a harmadik fehér lesz?

Megoldás Számoljuk meg úgy az elemi eseményeket, hogy a sorrendet figyelembe vesszük. Ekkor az összes elemi esemény száma $|\Omega| = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. A kedvező elemi események száma $|A| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$, hiszen az már rögzítve van, hogy milyen sorrendben kell érkezniük. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \frac{168}{990} = \frac{28}{165} = 0.1697.$$

6. Két dobókockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?

Megoldás Legyen A az az esemény, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2. Ekkor mivel A pontosan azt jelenti, hogy az eltérés 0 vagy 1 vagy 2, fennáll az alábbi egyenlőség

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2,$$

ahol A_j az az esemény, hogy a dobás eltérése pontosan $j = 0, 1, 2$. Továbbá ezek az események páronként kizáróak, mivel egyszerre semelyik kettő nem következhet be. Vagyis

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

Továbbá az összes elemi esemény száma $|\Omega| = 6^2 = 36$. Másfelől a különbség úgy lehet csak 0, ha mindkét kockán ugyanaz szerepel, vagyis $|A_0| = 6$. Ahhoz, hogy a különbség 1 legyen 5-féleképpen tudjuk megválasztani a kisebbik számot. Ekkor a nagyobbik szám már determinálva van, de ezek 2-féle sorrendben szerepelhetnek a két különböző kockán, vagyis $|A_1| = 5 \cdot 2 = 10$. Hasonlóan $|A_2| = 4 \cdot 2 = 8$. Azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{2}{3}.$$

7. Az 1-től 1000-ig terjedő számok közül találomra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 6-tal vagy 8-cal osztható?

Megoldás Tekintsük az alábbi eseményeket

$$A = \{\text{a szám osztható 6-tal}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{a szám osztható 8-cal}\}.$$

Ekkor a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cup B)$, hiszen ez annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a szám osztható 6-tal vagy 8-cal. Ekkor

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Először

$$\mathbb{P}(A) = \frac{166}{1000} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{125}{1000},$$

hiszen az 1 és 1000 közötti 6-tal osztható számoknak a száma $\left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$ és hasonlóan a 8-cal oszthatóak száma $\left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$. Itt $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egész rész.

Másfelől $A \cap B$ az az esemény, hogy a szám 6-tal és 8-cal is osztható, ami pontosan azt jelenti, hogy a szám osztható a legkisebb közös többszörösükkel, vagyis 24-gyel. Innen

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{41}{1000}.$$

Összegezve

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{166}{1000} + \frac{125}{1000} - \frac{41}{1000} = \frac{1}{4}.$$

8. Egy vizsgában 10 feleletválasztós kérdés van, 4-4 válaszlehetőséggel, mindegyik kérdésnél pontosan egy válasz a helyes. Egy vizsgázó tanulás nélkül véletlenszerűen kiválasztva tölti ki a feladatlapot (minden kérdésnél pontosan egy lehetőséget választ).

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyik kérdésre sem válaszol helyesen?

Megoldás Az összesen $|\Omega| = 4^{10}$ féle módon töltheti ki a tesztet, hiszen mind a 10 kérdésre 4 féle lehetőséget választhat. Amennyiben A_0 az az esemény, hogy 0 kérdésre válaszol helyesen, akkor $|A_0| = 3^{10}$, hiszen mind a 10 kérdésnél 3 rossz válaszlehetőség létezik. Vagyis

$$\mathbb{P}(A_0) = \frac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0.0563.$$

- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább három kérdésre helyesen válaszol?

Megoldás Érdekes kiszámítani a komplementer esemény valószínűségét. Annak az eseménynek, hogy legalább három kérdésre helyesen válaszol a komplementere, hogy legfeljebb 2 kérdésre válaszol helyesen. Ekkor a keresett valószínűség

$$1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2),$$

ahol A_j az az esemény, hogy pontosan $j = 0, 1, 2$ kérdésre válaszol helyesen. Az A_0, A_1 és A_2 események nyilvánvalóan páronként kizáróak. Korábban már A_0 valószínűségét kiszámoltuk. Továbbá

$$\mathbb{P}(A_1) = \binom{10}{1} \frac{3^9}{4^{10}} \approx 0.1877,$$

hiszen először kiválasztjuk, hogy melyik kérdésre válaszol helyesen, majd a maradék 9 kérdésre 3^9 -féle különböző módon válaszolhat rosszul. Hasonlóan

$$\mathbb{P}(A_2) = \binom{10}{2} \frac{3^8}{4^{10}} \approx 0.2816.$$

Amiből

$$1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) \approx 0.4744.$$

9. Az ötöslottó (5 darab különböző számot húznak 1 és 90 között) esetében számoljuk ki az alábbi valószínűségeket.

- (a) Mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50.

Megoldás Legyen A az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.0482.$$

- (b) Mindegyik kihúzott szám páros.

Megoldás Legyen B az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.0278.$$

- (c) Mindegyik kihúzott szám 1 és 50 közötti páros szám.

Megoldás Ez az esemény pontosan $A \cap B$.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{25}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.0012.$$

- (d) Van olyan szám, ami legfeljebb 50 vagy páros.

Megoldás Ez az esemény pontosan $A \cup B$.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \approx 0.0748.$$

10. 10 ember (köztük Alice és Bob) véletlenszerűen leül

- (a) egy padra.
- (b) egy kör alakú asztal köré

Mennyi a valószínűsége, hogy Alice és Bob egymás mellé ül?

Megoldás

- (a) Összesen $|\Omega_a| = 10!$ féleképpen tudnak leülni a padra. Tekintsük Alice-t és Bob-ot egy embernek. Ekkor $9!$ -féleképpen tudjuk egymás mellé ültetni az embereket. De Alice és Bob egymáshoz képes 2-féle sorrendben szerepelhet. Ez összesen $|A| = 9! \cdot 2$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{1}{5}.$$

- (b) Korábban kiszámoltuk, hogy $|\Omega_b| = 9!$. Másfelől az előző részbeli trükköt alkalmazva és őket egyetlen személynek tekintve adódik, hogy $|B| = 8! \cdot 2$. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(B) = \frac{8! \cdot 2}{9!} = \frac{2}{9}.$$

11. 10 házaspár táncolni ment. Mindenki pontosan egy ellenkező nemű emberrel táncolt. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 7 házaspár tagjai táncoltak egymással?

Megoldás Rögzítsük egy fix sorrendjét a hölgyeknek. Majd melléjük rendezzük sorrendbe a férfiakat. Ekkor annyi pár képezhető, ahányféleképpen a férfiak sorrendbe rendezhetőek, vagyis $|\Omega| = 10!$.

Most legyen A az az esemény, amikor pontosan 7 házaspár tagjai táncolnak egymással. Először is $\binom{10}{3} = 120$ féleképpen választhatjuk, ki azt a 3 párt, akik nem egymással táncolnak. Legyenek a hölgyek F_1, F_2, F_3 és a férfiak M_1, M_2, M_3 . Könnyen látható, hogy az összes lehetséges párosítás, ahol senki sem táncol a saját partnerével a következők:

$$(F_1, M_2), (F_2, M_3), (F_3, M_1) \quad \text{és} \quad (F_1, M_3), (F_2, M_1), (F_3, M_2),$$

ami összesen 2 lehetőség, így

$$|A| = \binom{10}{3} \cdot 2 = 240.$$

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A) = \frac{240}{10!} \approx 0.00006138.$$