

2. Gyakorlat

Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség) Legyenek A, B események és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Állítás (Szorzási szabály) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ események, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \dots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1).$$

Teljes valószínűség tétele

Definíció (Teljes eseményrendszer) Az $B_1, B_2, B_3, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egyszerre pontosan egy esemény következik be közülük. Formálisan:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén,
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele) Legyen $B_1, B_2, B_3, \dots$ teljes eseményrendszer, hogy $\mathbb{P}(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Ekkor minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n).$$

Bayes tétel

Tétel (Bayes) Legyen $B_1, B_2, B_3, \dots$ teljes eseményrendszer, hogy $\mathbb{P}(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Ekkor minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n)}.$$

Függetlenség

Definíció (Függetlenség) Az A és B események függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Állítás Amennyiben $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor az A és B események pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A).$$

Definíció (Teljes függetlenség) Az $A_1, A_2, A_3, \dots$ események akkor teljesen függetlenek, ha bárhogyan választunk ki közülük véges sokat $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, akkor azokra teljesül, hogy:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Feladatok

1. Feldobtunk három dobókockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mennyi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?
2. Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mennyi a valószínűsége, hogy írás is van?
3. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három-három labdát, közben minden játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván ha volt köztük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez egy új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?
4. Először húzunk egy lapot egy 52 lapos franciakártya-csomagból. Ha ez pikk, egyszer, egyébként kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?
5. Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat feldobom.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
 - (b) Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?
6. Adott egy vizsgakérdés, három lehetséges válasszal. Egy hipotetikus hallgató $0 < p < 1$ valószínűséggel tudja a helyes választ, míg ha nem tudja, tippel (egyenlő eséllyel választva a három válasz közül). Feltéve, hogy helyesen válaszolt, mi a valószínűsége, hogy tudta is a választ a hallgató?
7. Négy várost utak kötnek össze a következőképp: A-t összeköti út B-vel illetve C-vel, hasonlóan D-t összeköti út B-vel és C-vel, továbbá megy egy út B és C városok között is. Egy adott téli napon az egyes útszakaszokon egymástól függetlenül $1/5$ valószínűséggel alakul ki hótorlasz. Mekkora a valószínűsége, hogy az adott napon el lehet jutni A-ból D-be?
8. Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?
9. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény (ötöslottó) közül legalább az egyik pontosan négytalálatos?
10. Legyenek az A, B és C események teljesen függetlenek és legyen

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

Határozzuk meg az $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ esemény valószínűségét!