

2. Gyakorlat

Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség) Legyenek A, B események és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Állítás (Szorzási szabály) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ események, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \dots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1).$$

Teljes valószínűség tétele

Definíció (Teljes eseményrendszer) Az $B_1, B_2, B_3, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egyszerre pontosan egy esemény következik be közülük. Formálisan:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén,
2. $\bigcup_n B_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele) Legyen $B_1, B_2, B_3, \dots$ teljes eseményrendszer, hogy $\mathbb{P}(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Ekkor minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n).$$

Bayes tétel

Tétel (Bayes) Legyen $B_1, B_2, B_3, \dots$ teljes eseményrendszer, hogy $\mathbb{P}(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Ekkor minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n)}.$$

Függetlenség

Definíció (Függetlenség) Az A és B események függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Állítás Amennyiben $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor az A és B események pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A).$$

Definíció (Teljes függetlenség) Az $A_1, A_2, A_3, \dots$ események akkor teljesen függetlenek, ha bárhogyan választunk ki közülük véges sokat $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, akkor azokra teljesül, hogy:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Feladatok

1. Feldobtunk három dobókockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mennyi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{van 6-os}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{a dobott számok összege 15}\}.$$

Ekkor kell

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Az összes elemi esemény száma $6^3 = 216$. 15 következőképpen lehet az összeg.

$$15 = \underbrace{6+6+2}_{\substack{3! \\ 2!}=3 \text{ lehetőség}} = \underbrace{6+5+4}_{3!=6 \text{ lehetőség}} = \underbrace{5+5+5}_{1 \text{ lehetőség}}$$

Amiből

$$\mathbb{P}(B) = \frac{10}{216}.$$

Továbbá $A \cap B$ az az esemény, amikor az összeg 15 és szerepel 6-os, ami összesen 9 lehetőség, vagyis

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{216}.$$

Innen adódik, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{10} = 0.9.$$

2. Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mennyi a valószínűsége, hogy írás is van?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{van írás}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{van fej}\}.$$

Ekkor kell

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Az összes elemi esemény száma $2^3 = 8$. Annak a valószínűsége, hogy van fej

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}.$$

Az $A \cap B$ esemény pontosan azt jelenti, hogy fej és írás is szerepel. Ez így lehetséges, hogy egy írás és két fej (3 lehetőség), illetve két fej és egy írás (3 lehetőség), vagyis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Innen

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{6}{7} \approx 0.8571.$$

3. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három-három labdát, közben minden játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván ha volt köztük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez egy új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A_i = \{\text{az } i\text{-edik játékhoz 1 használatlan és 2 használt labdát használunk}\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

A szorzási szabály alapján

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1).$$

Továbbá

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{9}{1} \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}}, \quad \mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{\binom{8}{1} \binom{7}{2}}{\binom{15}{3}} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{7}{1} \binom{8}{2}}{\binom{15}{3}},$$

hiszen vegyük észre, hogy amennyiben a korábbi húzásokat feltesszük, akkor a használatlan labdák használtak lesznek, így a számuk eggyel csökken. Ezzel párhuzamosan a használt labdák száma eggyel nő. Innen

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{7}{1} \binom{8}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{1} \binom{7}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{9}{1} \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} \approx 0.0472.$$

4. Először húzunk egy lapot egy 52 lapos franciakártya-csomagból. Ha ez pikk, egyszer, egyébként kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{egyszer sem dobunk fejet}\},$$

illetve

$$B_0 = \{\text{nem húzunk pikket}\} \quad \text{és} \quad B_1 = \{\text{pikket húzunk}\}.$$

Vegyük észre, hogy B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkotnak, hiszen egyszerre pontosan egy következik be közülük. Ekkor a teljes valószínűség tételét használva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \underbrace{\mathbb{P}(A | B_0)}_{1 - \frac{5^2}{6^2}} \underbrace{\mathbb{P}(B_0)}_{\frac{3}{4}} + \underbrace{\mathbb{P}(A | B_1)}_{\frac{1}{6}} \underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{11}{36} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{48} \approx 0.2708. \end{aligned}$$

5. Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat feldobom.
- Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
 - Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{egyszer sem dobunk fejet}\},$$

illetve

$$B_i = \{\text{a kockával } i \text{ értéket dobunk}\} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

- Vegyük észre, hogy a $B_1, B_2, \dots, B_6$ események teljes eseményrendszert alkotnak, amiből a teljes valószínűség tételét használva

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{P}(B_i).$$

Továbbá minden $i = 1, 2, \dots, 6$ esetén

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{6} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A | B_i) = \frac{1}{2^i} = 2^{-i}.$$

Innen

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 2^{-i} = \frac{21}{128} \approx 0.1641.$$

(b) Használjuk a Bayes-tételt

$$\mathbb{P}(B_6 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_6)\mathbb{P}(B_6)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{21}{128}} = \frac{1}{63} \approx 0.0159.$$

6. Adott egy vizsgakérdés, három lehetséges válasszal. Egy hipotetikus hallgató $0 < p < 1$ valószínűséggel tudja a helyes választ, míg ha nem tudja, tippel (egyenlő eséllyel választva a három válasz közül). Feltéve, hogy helyesen válaszolt, mi a valószínűsége, hogy tudta is a választ a hallgató?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{a hallgató helyesen válaszol}\},$$

illetve

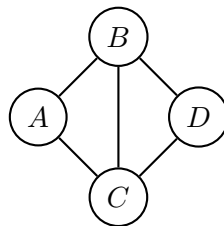
$$B_0 = \{\text{a hallgató nem tudja a választ}\} \quad \text{és} \quad B_1 = \{\text{a hallgató tudja a választ}\}.$$

Ekkor B_0 és B_1 teljes eseményrendszer alkotnak. A Bayes-tételt használva

$$\mathbb{P}(B_1 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A | B_0)\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(A | B_1)\mathbb{P}(B_1)} = \frac{1 \cdot p}{\frac{1}{3} \cdot (1 - p) + 1 \cdot p} = \frac{3p}{2p + 1}.$$

7. Négy várost utak kötnék össze a következőképp: A-t összeköti út B-vel illetve C-vel, hasonlóan D-t összeköti út B-vel és C-vel, továbbá megy egy út B és C városok között is. Egy adott téli napon az egyes útszakaszokon egymástól függetlenül $1/5$ valószínűséggel alakul ki hótorlasz. Mekkora a valószínűsége, hogy az adott napon el lehet jutni A-ból D-be?

Megoldás A feladat szövege szerint az úthálózat az alábbi.



Legyenek az alábbi események

$$F_i = \{A\text{-ből } B \text{ és } C \text{ közül pontosan } i \text{ darab városba tudunk eljutni } D \text{ érintése nélkül}\} \quad (i = 0, 1, 2).$$

Ekkor triviálisan F_0, F_1 és F_2 teljes eseményrendszert alkot. Továbbá legyenek

$$H_{i,j} = \{i \text{ és } j \text{ között hótorlasz van}\}.$$

Ekkor a függetlenséget használva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_0) &= \mathbb{P}(H_{A,B} \cap H_{A,C}) \\ &= \mathbb{P}(H_{A,B})\mathbb{P}(H_{A,C}) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{25}. \end{aligned}$$

Másfelől

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_1) &= \mathbb{P}(\overline{H_{A,B}} \cap H_{A,C} \cap H_{B,C}) + \mathbb{P}(\overline{H_{A,C}} \cap H_{A,B} \cap H_{B,C}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{H_{A,B}})\mathbb{P}(H_{A,C})\mathbb{P}(H_{B,C}) + \mathbb{P}(\overline{H_{A,C}})\mathbb{P}(H_{A,B})\mathbb{P}(H_{B,C}) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{125}. \end{aligned}$$

Végül kihasználva, hogy teljes eseményrendszert alkotnak

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_2) &= 1 - \mathbb{P}(F_0) - \mathbb{P}(F_1) \\ &= 1 - \frac{1}{25} - \frac{8}{125} \\ &= \frac{112}{125}.\end{aligned}$$

Legyen D az az esemény, hogy el tudunk jutni A -ból D -be. Ekkor a teljes valószínűség tételét használva

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D | F_0)\mathbb{P}(F_0) + \mathbb{P}(D | F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(D | F_2)\mathbb{P}(F_2).$$

Továbbá

$$\mathbb{P}(D | F_0) = 0,$$

hiszen ekkor biztosan nem tudunk eljutni D -be.

$$\mathbb{P}(D | F_1) = \frac{4}{5},$$

hiszen ekkor egyetlen lehetséges úton nem szabad hőtörlesztnak kialakulnia.

$$\mathbb{P}(D | F_2) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{24}{25},$$

hiszen ekkor a két lehetséges útból legalább egynek járhatónak kell lennie.

Azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D | F_0)\mathbb{P}(F_0) + \mathbb{P}(D | F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(D | F_2)\mathbb{P}(F_2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{125} + \frac{24}{25} \cdot \frac{112}{125} \\ &= \frac{2848}{3125} \\ &\approx 0.9114.\end{aligned}$$

8. Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

Megoldás A függetlenséghez ellenőrizni kell, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ teljesül-e. Az összes elemi esemény száma $|\Omega| = 2^3 = 8$.

Legfeljebb egy fejet úgy dobhatunk, ha nem dobunk fejet egyszer sem (1 lehetőség), illetve, ha pontosan egy fejet dobunk (3 lehetőség). Vagyis $|A| = 4$. Innen

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Egy fejet és egy írást úgy dobhatunk, hogy vagy két fejet és egy írást dobunk (3 lehetőség), vagy két írást és egy fejet dobunk (3 lehetőség). Vagyis $|B| = 6$. Innen

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Végül $A \cap B$ pontosan azt jelenti, hogy egy fejet és két írást dobunk (3 lehetőség). Vagyis $|A \cap B| = 3$. Innen

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Valóban teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

így az A és B események függetlenek.

9. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény (ötöslottó) közül legalább az egyik pontosan négytalálatos?

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$A = \{\text{az 1-es lottószelvény négytalálatos}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{a 2-es lottószelvény négytalálatos}\}.$$

Vegyük észre, hogy mivel a két lottószelvény egymástól függetlenül töltöttük ki, A és B függetlenek lesznek, vagyis $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Másfelől triviálisan $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Annak a valószínűségét keressük, hogy a kettő közül legalább az egyik négytalálatos lesz. Ez nem más mint $\mathbb{P}(A \cup B)$. A korábbiakat használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2. \end{aligned}$$

Másfelől

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}},$$

hiszen összesen 90 számot húznak. Ezek közül pontosan 4-nek kell kikerülni az 5 darab közül, amit tippeltünk. Másfelől 1 darab kell a maradék 85 közül, amit nem tippeltünk. Azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 2 \cdot \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} - \left[\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \right]^2 \approx 0.00001934.$$

10. Legyenek az A , B és C események teljesen függetlenek és legyen

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

Határozzuk meg az $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ esemény valószínűségét!

Megoldás Használjuk a teljes függetlenséget.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} \approx 0.1667. \end{aligned}$$