

3. Gyakorlat

Valószínűességi változók, diszkrét valószínűességi változók, nevezetes diszkrét eloszlások

Valószínűességi változók

Definíció (Valószínűességi változó) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűességi mező. Ekkor az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt valószínűességi változónak nevezzük, amennyiben minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{X < x\} \in \mathcal{F}$. (Vagyis egy valószínűességi változó minden elemi eseményhez egy valós számot rendel.)

Diszkrét valószínűességi változók

Definíció (Diszkrét valószínűességi változó) Az X valószínűességi változó diszkrét, amennyiben az értékkészlete megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen).

Definíció (Súlyfüggvény) Az X valószínűességi változó súlyfüggvénye $p : \text{Ran}(X) \rightarrow [0, 1]$

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Nevezetes diszkrét eloszlások

- **Bernoulli:** $X \sim \text{Ber}(p)$ ($0 < p < 1$)

Egy kísérletet végzünk, ami p valószínűességgel sikeres. Ekkor X az 1-es értéket veszi fel, ha a kísérlet sikeres, egyébként nullát.

$$p(0) = 1 - p \quad \text{és} \quad p(1) = p.$$

- **Binomiális:** $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^+, 0 < p < 1$)

Végezzünk n darab kísérletet, amik egymástól függetlenül azonos p valószínűességgel sikeresek. Ekkor X a sikeres kísérletek száma.

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

- **Geometriai:** $X \sim \text{Geo}(p)$ ($0 < p < 1$)

Egy kísérletet, ami p valószínűességgel sikeres addig ismételünk egymástól függetlenül, amíg sikeres nem lesz. Ekkor X a szükséges próbálkozások száma.

$$p(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad 1 \leq k < \infty.$$

- **Poisson:** $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)

Amennyiben n elég nagy és p elég kicsi, akkor $\text{Bin}(n, p)$ jól közelíthető $\text{Poi}(np)$ eloszlással.

$$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad 0 \leq k < \infty.$$

Tétel Legyen $X \sim \text{Bin}(n, p_n)$. Amennyiben $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k),$$

ahol $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$.

Feladatok

- Dobjunk fel egy szabályos érmét egymástól függetlenül kétszer. Legyen X a fejek száma.
 - Írjuk fel az eseményteret és X -et, mint $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.
 - Milyen eloszlást követ X ?
- Dobjunk két 10 oldalú dobókockával, jelölje az eredményeiket X és Y . Mennyi $\mathbb{P}(X \leq Y)$?
- Egy boltban izzókat árulnak. Az izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor
 - mekkora eséllyel lesz legfeljebb három hibás?
 - hány lesz közülük rossz a legnagyobb valószínűséggel?
- Hányszor dobjunk egy kockával, hogyha azt akarjuk, hogy 0.5-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a 6-os dobások száma legalább kettő?
- Hét közben (hétfőtől péntekig) 0.25 valószínűséggel késik a reggeli vonat.
 - Mennyi a valószínűsége, hogy hét közben legfeljebb két napon késik?
 - Legyen jó hét az, amelyen legfeljebb két napon késik. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 hétből legalább 3 hét jó hét lesz?
- Egy társasjátékban két kockával dobok egyszerre. Egy olyan mezőre kerültem, ahonnan csak akkor tudok továbblépni, ha a dobott számok között szerepel a hatos. Mekkora valószínűséggel tudok két próbálkozáson belül továbblépni?
- Találomra választunk egymástól függetlenül két számot a $[0, 1]$ intervallumon. Ezt addig ismétljük egymástól függetlenül, amíg az egyik szám több mint kétszerese nem lesz a másiknak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez legfeljebb 3 lépésben sikerül.
- Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, amíg meg nem kapjuk a második fejet is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első fej után a második fejig ugyanannyi dobásra van szükség, mint amennyi az elsőig kellett?
- Lovas gátversenyen a ló az akadályok mindegyikét egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel veri le. A pályán számtalan akadály akad. Ha 5% annak a valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy legfeljebb három akadályt ver le?
- Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% eséllyel legyen (legalább egy szem) mazsola?
- Egy futóversenyen a pályát sajnos kullancsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban pontosan egy kullancsot, 75-en pedig kettőt. Ezek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.
- Egy 400 oldalas könyvben 200 db sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. oldalon egynél több hiba lesz?