

4. Gyakorlat

Várható érték, variancia, együttes diszkrét eloszlások, valószínűségi változók függetlensége

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és varianciája

Definíció (Várható érték (diszkrét esetben)) Legyen X diszkrét valószínűségi változó. Ekkor az X várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x),$$

amennyiben a sor abszolút konvergens.

Állítás Legyen X diszkrét valószínűségi változó. Ekkor minden $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mérhető) függvényre

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x),$$

amennyiben a sor abszolút konvergens.

Definíció (Variancia és szórás (diszkrét esetben)) Legyen X diszkrét valószínűségi változó. Ekkor az X varianciája

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

amennyiben véges. Ekkor az X szórása $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$.

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke és szórása:

$X \sim$	Ber(p)	Bin(n, p)	Geo(p)	Poi(λ)
$\mathbb{E}(X)$	p	np	$1/p$	λ
$\mathbb{D}^2(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$(1-p)/p^2$	λ

Állítás Igazak minden X, Y valószínűségi változóra és a, b, c valós számokra igazak az alábbiak

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c,$$

vagyis a várható érték lineáris. Továbbá

$$\mathbb{D}^2(aX + c) = a^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) \quad \text{és} \quad \mathbb{D}(aX + c) = |a| \cdot \mathbb{D}(X)$$

Együttes diszkrét eloszlások

Definíció (Együttes súlyfüggvény) Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Ekkor az együttes súlyfüggvényük

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Ekkor a X és Y súlyfüggvénye megkapható az alábbi alakban

$$p_X(x) = \sum_{y \in \text{Ran}(Y)} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{és} \quad p_Y(y) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} p_{X,Y}(x, y).$$

Definíció (Valószínűségi változók függetlensége) Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Ekkor X és Y független, ha minden (Borel) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra az $\{X \in A\}$ és $\{Y \in B\}$ események függetlenek. Vagyis

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B).$$

Állítás Amennyiben az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y),$$

amennyiben a várható értékek léteznek.

Állítás Az X és Y diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha minden $x \in \text{Ran}(X), y \in \text{Ran}(Y)$ esetén

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y).$$

Feladatok

- Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Tegyük fel, hogy egy gyerek azonos valószínűséggel lesz fiú vagy lány. Mennyi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?
- Két kockával dobva határozzuk meg a dobott számok maximumának várható értékét és szórását.
- Legyen $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$. Határozzuk meg a következő mennyiségeket!
 - $\mathbb{E}\left((X+2)^2\right)$
 - $\mathbb{D}^2(3X+4)$
- Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos, egyenként kis valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz egy (360 napos) évben, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?
- Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?
- Független kísérleteket végzünk, melyek külön-külön mind p valószínűséggel sikerülnek. Addig ismételtetjük a kísérletet, amíg 3 sikeres nem lesz. Jelölje X az ehhez szükséges sikertelen kísérletek számát. Határozzuk meg az $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$ értéket (p függvényében).
- Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros eredmények számát.
 - Független-e X és Y ?
 - Mennyi $\mathbb{E}(XY)$ értéke?
- Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

 - Határozzuk meg p értékét.
 - Mennyi $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1)$?
 - Független-e X és Y ?
 - Mennyi $\mathbb{E}(XY)$ értéke?
- Egy dobozban 6 golyó van, 2 fehér, 2 zöld és 2 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a kihúzott golyók számát, Y pedig a kihúzott fehér színű golyók számát. Adjuk meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Független-e X és Y ?
- Az X és Y együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg, de két érték hiányzik. Tudjuk, hogy az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 0\}$ események függetlenek.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1/10$	$1/5$	
2		$1/4$	$1/5$

 - Határozzuk meg a hiányzó értékeket.
 - Független-e X és Y ?
 - Számítsuk ki az $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$ valószínűséget.
 - Számítsuk ki az $\mathbb{E}(4X + Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$ várható értékeket.