

#### 4. Gyakorlat

Várható érték, variancia, együttes diszkrét eloszlások, valószínűségi változók függetlensége

#### Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és varianciája

**Definíció (Várható érték (diszkrét esetben))** Legyen  $X$  diszkrét valószínűségi változó. Ekkor az  $X$  várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x),$$

amennyiben a sor abszolút konvergens.

**Állítás** Legyen  $X$  diszkrét valószínűségi változó. Ekkor minden  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (mérhető) függvényre

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x),$$

amennyiben a sor abszolút konvergens.

**Definíció (Variancia és szórás (diszkrét esetben))** Legyen  $X$  diszkrét valószínűségi változó. Ekkor az  $X$  varianciája

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

amennyiben véges. Ekkor az  $X$  szórása  $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$ .

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke és szórása:

| $X \sim$          | Ber( $p$ ) | Bin( $n, p$ ) | Geo( $p$ )  | Poi( $\lambda$ ) |
|-------------------|------------|---------------|-------------|------------------|
| $\mathbb{E}(X)$   | $p$        | $np$          | $1/p$       | $\lambda$        |
| $\mathbb{D}^2(X)$ | $p(1-p)$   | $np(1-p)$     | $(1-p)/p^2$ | $\lambda$        |

**Állítás** Igazak minden  $X, Y$  valószínűségi változóra és  $a, b, c$  valós számokra igazak az alábbiak

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c,$$

vagyis a várható érték lineáris. Továbbá

$$\mathbb{D}^2(aX + c) = a^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) \quad \text{és} \quad \mathbb{D}(aX + c) = |a| \cdot \mathbb{D}(X)$$

#### Együttes diszkrét eloszlások

**Definíció (Együttes súlyfüggvény)** Legyenek  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Ekkor az együttes súlyfüggvényük

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Ekkor a  $X$  és  $Y$  súlyfüggvénye megkapható az alábbi alakban

$$p_X(x) = \sum_{y \in \text{Ran}(Y)} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{és} \quad p_Y(y) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} p_{X,Y}(x, y).$$

**Definíció (Valószínűségi változók függetlensége)** Legyenek  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Ekkor  $X$  és  $Y$  független, ha minden (Borel)  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  halmazra az  $\{X \in A\}$  és  $\{Y \in B\}$  események függetlenek. Vagyis

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B).$$

**Állítás** Amennyiben az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y),$$

amennyiben a várható értékek léteznek.

**Állítás** Az  $X$  és  $Y$  diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha minden  $x \in \text{Ran}(X), y \in \text{Ran}(Y)$  esetén

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y).$$

**Feladatok**

1. Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Tegyük fel, hogy egy gyerek azonos valószínűséggel lesz fiú vagy lány. Mennyi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

**Megoldás** Legyen  $X$  a családban született gyerekek száma. Ekkor

$$\text{Ran}(X) = \{1, 2, 3\}.$$

Továbbá az  $X$  súlyfüggvénye

$$p_X(1) = \mathbb{P}(\text{az első gyerek fiú}) = \frac{1}{2},$$

$$p_X(2) = \mathbb{P}(\text{az első gyerek lány, a második fiú}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_X(3) = \mathbb{P}(\text{az első gyerek lány, a második is lány}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ekkor  $X$  várható értéke

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{4} \\ &= 1.75.\end{aligned}$$

Vagyis egy ilyen családban átlagosan 1.75 gyerek születik.

A varianciához szükség van a második momentumra

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 1^2 \cdot p_X(1) + 2^2 \cdot p_X(2) + 3^2 \cdot p_X(3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

Ekkor a variancia

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}.$$

A szórás innen

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{\sqrt{11}}{4} \approx 0.8292.$$

Vagyis egy ilyen családban a gyerekek száma átlagosan 0.8292-vel tér el az átlagos gyerekszámától, vagyis 1.75-től.

2. Két kockával dobva határozzuk meg a dobott számok maximumának várható értékét és szórását.

**Megoldás** Legyen  $X$  a dobott számok maximuma. Ekkor

$$\text{Ran}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ekkor az  $X$  súlyfüggvénye  $k = 1, 2, \dots, 6$  esetén

$$p_X(k) = \frac{1 + 2(k-1)}{36},$$

hiszen összesen 36 elemi eseményünk van és  $k$  pontosan úgy lehet a maximum, ha mindkét kockán  $k$  szerepel, vagy az egyik kockán  $k$  a másikon pedig egy nála kisebb szám szerepel. Az utóbbi azonban kétféleképpen (különböztessük meg a kockákat!) lehetséges (melyik kockán szerepel a kisebb).

Ekkor az  $X$  várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1 + 2(k-1)}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.4722.$$

A második momentum

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 \cdot \frac{1 + 2(k-1)}{36} = \frac{791}{36} \approx 21.9722.$$

Innen a variancia

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \approx 1.9715,$$

a szórás pedig

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{\sqrt{2555}}{36} \approx 1.4041.$$

3. Legyen  $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Határozzuk meg a következő mennyiségeket!

(a)  $\mathbb{E}((X+2)^2)$

(b)  $\mathbb{D}^2(3X+4)$

**Megoldás** Tudjuk, hogy amennyiben  $X \sim \text{Geo}(p)$ , akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{és} \quad \mathbb{D}^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Mivel most  $p = \frac{1}{3}$ , így

$$\mathbb{E}(X) = 3 \quad \text{és} \quad \mathbb{D}^2(X) = 6.$$

(a) Használjuk a várható érték linearitását

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X+2)^2) &= \mathbb{E}(X^2 + 4X + 4) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 4 \cdot \mathbb{E}(X) + 4. \end{aligned}$$

A várható érték ismert, de még szükség van a második momentumra, azonban a varianciát ismerjük, így

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ 6 &= \mathbb{E}(X^2) - 3^2, \end{aligned}$$

amiből

$$\mathbb{E}(X^2) = 15.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\mathbb{E}((X+2)^2) = 15 + 4 \cdot 3 + 4 = 31.$$

(b) Használjuk a varianciára vonatkozó azonosságot

$$\mathbb{D}^2(3X+4) = 3^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 9 \cdot 6 = 54.$$

4. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos, egyenként kis valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz egy (360 napos) évben, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

**Megoldás** Legyen  $X$  az egy nap elromlott telefonok száma. Ekkor mivel sok telefon található az egyetemen és ezek egymástól függetlenül azonos kis valószínűséggel romlanak el

$$X \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Továbbá tudjuk, hogy 360 napból átlagosan 12 olyan van, amikor egyetlen készülék sem romlik el. Ez az empirikus megfigyelés jó annak a valószínűségnek a becslésére, hogy egy nap egyetlen telefon sem romlik el, vagyis

$$\frac{12}{360} = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}.$$

Az egyenletet megoldva  $\lambda = \ln(30)$ . Továbbá tudjuk, hogy  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ , így

$$\mathbb{E}(X) = \lambda = \ln(30) \approx 3.4012,$$

így átlagosan egy nap ennyi telefon fog elromlani.

Legyen  $Y$  azon napok száma a 360 napból, amikor legalább 2 telefon elromlik. Ekkor mivel minden nap egymástól függetlenül azonos  $p$  valószínűséggel romlik el legalább 2 telefon

$$Y \sim \text{Bin}(360, p).$$

Ahol  $p$  értéke

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(X \geq 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - e^{-\ln(30)} - \ln(30)e^{-\ln(30)} \\ &\approx 0.8533. \end{aligned}$$

Ekkor az ilyen napok számának a várható értéke, mivel  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ , ahol  $n = 360$  és  $p \approx 0.8533$

$$\mathbb{E}(Y) = n \cdot p \approx 360 \cdot 0.8533 \approx 307.1865.$$

5. Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

**Megoldás** Legyen  $X_j$  a  $j$ -edik séta során összeszedett kullancsok száma. Ekkor a feladat szövege szerint

$$X_j \sim \text{Poi}\left(\frac{1}{100}\right), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Továbbá vegyük észre, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek.

A keresett valószínűség ekkor

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1).$$

Használjuk ki, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege Poisson marad, aminek a paramétere az összeg tagjai paramétereinek az összege. (Amennyiben ez nem volt előadáson, akkor ez a feladat maradjon meg az érdekesség kedvéért.) Vagyis

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \sim \text{Poi}\left(\frac{5}{100}\right),$$

így

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}} \approx 0.0476.$$

6. Független kísérleteket végzünk, melyek külön-külön mind  $p$  valószínűséggel sikerülnek. Addig ismételtetjük a kísérletet, amíg 3 sikeres nem lesz. Jelölje  $X$  az ehhez szükséges sikertelen kísérletek számát. Határozzuk meg az  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$  értéket ( $p$  függvényében).

**Megoldás** Legyen  $X$  az harmadik sikeres kísérletig szükséges kísérletek számát. Ekkor

$$\text{Ran}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Továbbá az  $X$  súlyfüggvénye minden  $k = 0, 1, 2, \dots$  esetén

$$p_X(k) = \binom{k+2}{2} (1-p)^k p^3,$$

hiszen  $k+2$  kísérlet (a harmadik siker előttiek) közül kell kiválasztani, hogy melyik 2 lesz sikeres. Ekkor amennyiben fixáltuk a pozíciókat, három  $p$  valószínűséggel sikeres a maradék  $k$  darab pedig  $1-p$  valószínűséggel sikertelen egymástól függetlenül. Ekkor a keresett várható érték

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \binom{k+2}{2} (1-p)^k p^3.$$

Ekkor tovább kifejtve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \binom{k+2}{2} (1-p)^k p^3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{(k+2)(k+1)k!}{2! \cdot k!} (1-p)^k p^3 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{(k+2)(k+1)k!}{2! \cdot k!} (1-p)^k p^3 = \frac{p^3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{p^3}{2} \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p^2}{2}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) = \frac{p^2}{2}.$$

7. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje  $X$  a hatosok,  $Y$  pedig a páros eredmények számát.

- (a) Független-e  $X$  és  $Y$ ?  
(b) Mennyi  $\mathbb{E}(XY)$  értéke?

**Megoldás** Ábrázoljuk az együttes eloszlásuk táblázatát. Mivel  $\text{Ran}(X) = \text{Ran}(Y) = \{0, 1, 2\}$ , ezért az alábbi táblázatot kell kitölteni.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|---|---|---|
| 0                |   |   |   |
| 1                |   |   |   |
| 2                |   |   |   |

Vegyük észre, hogy minden esetben  $X \leq Y$ , mivel minden hatos dobás páros dobásnak számít, így

$$\mathbb{P}(X < Y) = 0 :$$

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|---|---|---|
| 0                |   | 0 | 0 |
| 1                |   |   | 0 |
| 2                |   |   |   |

$$\mathbb{P}(Y = 2, X = 2) = \frac{1}{36},$$

mivel az, hogy két hatos és két páros dobtunk pontosan azt jelenti, hogy 2 hatos dobtunk:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2              |
|------------------|---|---|----------------|
| 0                |   | 0 | 0              |
| 1                |   |   | 0              |
| 2                |   |   | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 2, X = 1) = \frac{2 \cdot 2}{36} = \frac{4}{36},$$

hiszen ekkor egy hatos és egy párost kell dobnunk, ami nem hatos (ezek kétféle sorrendben szerepelhetnek):

| $Y \backslash X$ | 0 | 1              | 2              |
|------------------|---|----------------|----------------|
| 0                |   | 0              | 0              |
| 1                |   |                | 0              |
| 2                |   | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 2, X = 0) = \frac{2 \cdot 2}{36} = \frac{12}{36},$$

hiszen ekkor két párost kell dobnunk, amik nem hatosak:

| $Y \backslash X$ | 0              | 1              | 2              |
|------------------|----------------|----------------|----------------|
| 0                |                | 0              | 0              |
| 1                |                |                | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 1, X = 1) = \frac{3 \cdot 2}{36} = \frac{6}{36},$$

hiszen ekkor egy hatos és egy páratlan számot kell dobnunk (kétféle sorrend lehet megint):

| $Y \backslash X$ | 0              | 1              | 2              |
|------------------|----------------|----------------|----------------|
| 0                |                | 0              | 0              |
| 1                |                | $\frac{6}{36}$ | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 1, X = 0) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{36} = \frac{12}{36},$$

hiszen ekkor egy páros számot, ami nem hatos és egy páratlan számot kell dobnunk (kétféle sorrend

lehet megint):

| $Y \backslash X$ | 0               | 1              | 2              |
|------------------|-----------------|----------------|----------------|
| 0                |                 | 0              | 0              |
| 1                | $\frac{12}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$  | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\mathbb{P}(Y = 0, X = 0) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{9}{36},$$

hiszen ekkor két páratlan számot kell dobnunk:

| $Y \backslash X$ | 0               | 1              | 2              |
|------------------|-----------------|----------------|----------------|
| 0                | $\frac{9}{36}$  | 0              | 0              |
| 1                | $\frac{12}{46}$ | $\frac{6}{36}$ | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$  | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Azt kaptuk, hogy az együttes eloszlás táblázata

| $Y \backslash X$ | 0               | 1              | 2              |
|------------------|-----------------|----------------|----------------|
| 0                | $\frac{9}{36}$  | 0              | 0              |
| 1                | $\frac{12}{46}$ | $\frac{6}{36}$ | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$  | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

.

- (a) Számoljuk ki a marginális eloszlásokat (összegezzük az oszlopokat és a sorokat). Ezek nem lesznek mások, mint  $X$  súlyfüggvénye és  $Y$  súlyfüggvénye.

| $Y \backslash X$ | 0               | 1               | 2              | $p_Y(\cdot)$    |
|------------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0                | $\frac{9}{36}$  | 0               | 0              | $\frac{9}{36}$  |
| 1                | $\frac{12}{46}$ | $\frac{6}{36}$  | 0              | $\frac{18}{36}$ |
| 2                | $\frac{4}{36}$  | $\frac{4}{36}$  | $\frac{1}{36}$ | $\frac{9}{36}$  |
| $p_X(\cdot)$     | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1               |

. Innen látható, hogy nem függetlenek, mivel például

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{36} = \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 0).$$

- (b) Vegyük észre, hogy  $\text{Ran}(XY) = \{0, 1, 2, 4\}$ . Ekkor

| $Y \backslash X$ | 0               | 1              | 2              |
|------------------|-----------------|----------------|----------------|
| 0                | $\frac{9}{36}$  | 0              | 0              |
| 1                | $\frac{12}{46}$ | $\frac{6}{36}$ | 0              |
| 2                | $\frac{4}{36}$  | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= 0 \cdot \mathbb{P}(XY = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(XY = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(XY = 2) + 4 \cdot \mathbb{P}(XY = 4) \\
&= 0 \cdot \frac{25}{26} + 1 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{11}{36},
\end{aligned}$$

hiszen  $\mathbb{P}(XY = k)$  azoknak a celláknak az összege, ahol a megfelelő oszlop és sor fejlécében szereplő számok szorzata pontosan  $k$ .

8. Az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

| $Y \backslash X$ | -1   | 0     | 1     |
|------------------|------|-------|-------|
| -1               | $p$  | $3p$  | $6p$  |
| 1                | $5p$ | $15p$ | $30p$ |

(a) Határozzuk meg  $p$  értékét.

(b) Mennyi  $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1)$ ?

(c) Független-e  $X$  és  $Y$ ?

(d) Mennyi  $\mathbb{E}(XY)$  értéke?

### Megoldás

(a) Tudjuk, hogy a táblázatban szereplő valószínűség összege 1 kell legyen. Innen

$$\begin{aligned}
1 &= p + 3p + 6p + 5p + 15p + 30p \\
&= 60p,
\end{aligned}$$

vagyis  $p = \frac{1}{60}$ .

(b) A táblázat ekkor

| $Y \backslash X$ | -1             | 0               | 1               |
|------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| -1               | $\frac{1}{60}$ | $\frac{3}{60}$  | $\frac{6}{60}$  |
| 1                | $\frac{5}{60}$ | $\frac{15}{60}$ | $\frac{30}{60}$ |

. Amiből pedig

$$\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = \frac{5}{60} + \frac{15}{60} = \frac{1}{3}.$$

(c) A marginális eloszlásokat kiszámítva

| $Y \backslash X$ | -1             | 0               | 1               | $p_Y(\cdot)$    |
|------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| -1               | $\frac{1}{60}$ | $\frac{3}{60}$  | $\frac{6}{60}$  | $\frac{10}{60}$ |
| 1                | $\frac{5}{60}$ | $\frac{15}{60}$ | $\frac{30}{60}$ | $\frac{50}{60}$ |
| $p_X(\cdot)$     | $\frac{6}{60}$ | $\frac{18}{60}$ | $\frac{36}{60}$ | 1               |

.

A táblázatból látható, hogy minden  $x = -1, 0, 1$  és  $y = -1, 1$  esetén

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y),$$

így függetlenek.

(d) Használjuk ki, hogy  $X$  és  $Y$  független, így

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Másfelől

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= (-1) \cdot \frac{6}{60} + 0 \cdot \frac{18}{60} + 1 \cdot \frac{36}{60} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$



illetve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= (-1) \cdot \frac{10}{60} + 1 \cdot \frac{50}{60} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

9. Egy dobozban 6 golyó van, 2 fehér, 2 zöld és 2 piros. Egyesével addig húzunk visszatérés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje  $X$  a kihúzott golyók számát,  $Y$  pedig a kihúzott fehér színű golyók számát. Adjuk meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Független-e  $X$  és  $Y$ ?

**Megoldás** Vegyük észre, hogy  $\text{Ran}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , hiszen egyet biztosan kell húznunk, de 5 húzás után biztosan lesz egy piros. Továbbá  $\text{Ran}(Y) = \{0, 1, 2\}$ , hiszen ennyi fehéret húzhatunk ki.

Az alábbi táblázatot kell kitölteni

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|---|
| 0                |   |   |   |   |   |
| 1                |   |   |   |   |   |
| 2                |   |   |   |   |   |

Vegyük észre, hogy  $Y < X$ , hiszen annyiszor legalább próbálkoznunk kellett, amennyi fehéret húztunk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = 0.$$

Továbbá  $X - Y < 4$ , hiszen a maradék húzás, ami nem fehér volt biztosan kisebb, mint 4 (hiszen ekkor 2 zöld és 1 piros után biztosan vége lesz a húzásoknak). Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(Y \leq X - 4) = 0.$$

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|---|
| 0                |   |   |   | 0 | 0 |
| 1                | 0 |   |   |   | 0 |
| 2                | 0 | 0 |   |   |   |

A továbbiakban a szorzási szabály alkalmazzuk.

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

hiszen elsőre pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---------------|---|---|---|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ |   |   | 0 | 0 |
| 1                | 0             |   |   |   | 0 |
| 2                | 0             | 0 |   |   |   |

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15},$$

hiszen egy zöldet majd egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---------------|----------------|---|---|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ |   | 0 | 0 |
| 1                | 0             |                |   |   | 0 |
| 2                | 0             | 0              |   |   |   |

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{30},$$

hiszen két zöldet majd egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4 | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|---|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | 0 |
| 1                | 0             |                |                |   | 0 |
| 2                | 0             | 0              |                |   |   |

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15},$$

hiszen egy zöldet majd egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4 | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|---|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | 0 |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ |                |   | 0 |
| 2                | 0             | 0              |                |   |   |

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{15},$$

hiszen egy zöldet és egy feketét (kétféle sorrend), végül egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4 | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|---|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | 0 |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |   | 0 |
| 2                | 0             | 0              |                |   |   |

$$\mathbb{P}(X = 4, Y = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15},$$

hiszen két zöldet és egy feketét (háromféle sorrend), végül egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0              | 0 |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0 |
| 2                | 0             | 0              |                |                |   |

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{30},$$

hiszen két zöldet végül egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0              | 0 |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0 |
| 2                | 0             | 0              | $\frac{1}{30}$ |                |   |

$$\mathbb{P}(X = 4, Y = 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15},$$

hiszen két zöldet és egy feketét (háromféle sorrend) végül egy pirosat húzunk.

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5 |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0              | 0 |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0 |
| 2                | 0             | 0              | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{15}$ |   |

Az utolsó értéket megkaphatjuk, hogy 1-ből elvesszük a többi összegét.

$$\mathbb{P}(X = 5, Y = 2) = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15},$$

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5              |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0              | 0              |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0              |
| 2                | 0             | 0              | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

A táblázat tehát a marginális eloszlásokkal kiegészítve

| $Y \backslash X$ | 1             | 2              | 3              | 4              | 5              | $p_Y(\cdot)$  |
|------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ | 0              | 0              | $\frac{1}{2}$ |
| 1                | 0             | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0              | $\frac{1}{3}$ |
| 2                | 0             | 0              | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $p_X(\cdot)$     | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{5}$  | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 1             |

Innen könnyen látható, hogy  $X$  és  $Y$  nem független, hiszen például

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1).$$

10. Az  $X$  és  $Y$  együttes eloszlását az alábbi táblázat adja meg, de két érték hiányzik. Tudjuk, hogy az  $\{X = 2\}$  és  $\{Y = 0\}$  események függetlenek.

| $Y \backslash X$ | 0      | 1     | 2     |
|------------------|--------|-------|-------|
| 0                | $1/10$ | $1/5$ |       |
| 2                |        | $1/4$ | $1/5$ |

- (a) Határozzuk meg a hiányzó értékeket.  
 (b) Független-e  $X$  és  $Y$ ?  
 (c) Számítsuk ki az  $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$  valószínűséget.  
 (d) Számítsuk ki az  $\mathbb{E}(4X + Y)$  és  $\mathbb{E}(XY)$  várható értékeket.

**Megoldás**

- (a) Legyenek a hiányzó értékek  $p$  és  $q$ . Ekkor a marginálisokat is kiszámítva

| $Y \backslash X$ | 0                  | 1              | 2                 | $p_Y(\cdot)$       |
|------------------|--------------------|----------------|-------------------|--------------------|
| 0                | $\frac{1}{10}$     | $\frac{1}{5}$  | $p$               | $p + \frac{3}{10}$ |
| 2                | $q$                | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{5}$     | $q + \frac{9}{20}$ |
| $p_X(\cdot)$     | $q + \frac{1}{10}$ | $\frac{9}{20}$ | $p + \frac{1}{5}$ | 1                  |

A feladat szövege szerint  $\{X = 2\}$  és  $\{Y = 0\}$  függetlenek. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$$

$$p = \left(p + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(p + \frac{3}{10}\right).$$

Az egyenletet megoldva  $p$  értéke az alábbi lehet

$$p = \frac{1}{5} \quad \text{vagy} \quad p = \frac{3}{10}.$$

Azonban vegyük észre, hogy  $Y$  marginális eloszlását (sorösszegek) használva

$$p + \frac{3}{10} + q + \frac{9}{20} = 1.$$

Másfelől nyilvánvalóan  $0 \leq q \leq 1$  (mivel  $q$  egy valószínűség), amiből

$$p = \frac{1}{4} - q \leq \frac{1}{4}.$$

Innen adódik, hogy mivel  $\frac{3}{10} > \frac{1}{4}$

$$p = \frac{1}{5}.$$

Amiből pedig

$$q = \frac{1}{4} - p = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

A táblázat tehát (a marginális eloszlásokkal együtt)

| $Y \backslash X$ | 0              | 1              | 2             | $p_Y(\cdot)$  |
|------------------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2                | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $p_X(\cdot)$     | $\frac{3}{20}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{2}{5}$ | 1             |

- (b)  $X$  és  $Y$  nem függetlenek, mert például

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{10} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{20} = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0).$$

(c) Használjuk a feltételes valószínűség definícióját

$$\mathbb{P}(XY > 0 | X < 2) = \frac{\mathbb{P}(XY > 0, X < 2)}{\mathbb{P}(X < 2)}.$$

Másfelől vegyük észre, hogy mivel a szorzat pontosan akkor pozitív, ha  $X$  és  $Y$  is pozitív

$$\mathbb{P}(XY > 0, X < 2) = \mathbb{P}(X > 0, Y > 0, X < 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2).$$

Innen

| $Y \backslash X$ | 0              | 1              | 2             | $p_Y(\cdot)$  |
|------------------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2                | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $p_X(\cdot)$     | $\frac{3}{20}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{2}{5}$ | 1             |

$$\mathbb{P}(XY > 0 | X < 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X < 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{20} + \frac{9}{20}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12}.$$

(d) Használjuk ki a várható érték linearitását

$$\mathbb{E}(4X + Y) = 4 \cdot \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Másfelől

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \frac{3}{20} + 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(4X + Y) = 4 \cdot \frac{5}{4} + 1 = 6.$$

Végül vegyük észre, hogy  $\text{Ran}(XY) = \{0, 2, 4\}$  Amiből

| $Y \backslash X$ | 0              | 1             | 2             |
|------------------|----------------|---------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 2                | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ |

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 0 \cdot \mathbb{P}(XY = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(XY = 2) + 2 \cdot \mathbb{P}(XY = 4) \\ &= 0 \cdot \frac{11}{20} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{13}{10}. \end{aligned}$$