

5. Gyakorlat

Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, abszolút folytonos valószínűségi változók, eloszlások transzformációi

Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény) Legyen X valószínűségi változó. Ekkor $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X eloszlásfüggvénye, ha

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Az eloszlásfüggvény minden valószínűségi változó esetén létezik.

Tétel Az $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény pontosan, akkor eloszlásfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak, ha az alábbiak teljesülnek

1. F monoton nő
2. F jobbról folytonos: $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = F(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Definíció (Sűrűségfüggvény) Legyen X valószínűségi változó. Ekkor $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X sűrűségfüggvénye, ha

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds.$$

Amennyiben létezik, akkor X abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges (mérhető) $B \subseteq \mathbb{R}$ esetén (nekünk a legtöbbszor egy intervallum)

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(s) ds.$$

Tétel Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pontosan akkor sűrűségfüggvénye egy valószínűségi változónak, ha teljesülnek az alábbiak

1. $f \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Várható érték abszolút folytonos esetben

Definíció (Várható érték abszolút folytonos esetben) Legyen X valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx,$$

amennyiben az integrál abszolút konvergens.

Állítás (Transzformált várható értéke abszolút folytonos esetben) Legyen X valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $g(X)$ várható értéke (amennyiben abszolút konvergens az integrál)

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.$$

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes: $\text{Uni}(a, b)$. Az exponenciális eloszlás $\lambda > 0$ paraméterrel: $\text{Exp}(\lambda)$.

$X \sim$	$\text{Ran}(X)$	$F(x)$	$f(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
$\text{Uni}(a, b)$	$a \leq x \leq b$	$(x - a)/(b - a)$	$1/(b - a)$	$(a + b)/2$	$(b - a)^2/12$
$\text{Exp}(\lambda)$	$0 \leq x$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Megjegyzés Az exponenciális és a geometriai eloszlás örökifjú. Az X örökifjú, ha minden $s, t \geq 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Másfelől az exponenciális az egyetlen abszolút folytonos örökifjú eloszlás.

Feladatok

1. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények?

$$(a) F(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (b) F(x) = 1 - e^{-x^2} \quad (c) F(x) = e^{-e^{-x}} \quad (d) F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$$

2. Tudjuk, hogy az alábbi f függvény az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg α értékét.
(b) Adjuk meg X eloszlásfüggvényét.
(c) Adjuk meg a $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ valószínűséget.
(d) Számítsuk ki X várható értékét és szórását.
3. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

4. A $[0, 1]$ intervallumon találmra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P és a 0.3 pont közötti távolságot. Határozzuk meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
5. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percen látunk hullócsillagot $1 - e^{-\frac{2}{3}}$. Feltehetjük, hogy egy hullócsillag észleléséig hátralévő idő nem függ az eddig eltelt idő hosszától (azaz az eloszlás abszolút folytonos, örökifjú).
- (a) Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában?
(b) Mekkora az első hullócsillag észleléséig hátralévő idő várható értéke és szórása?
6. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig, és az első meghibásodás időpontja abszolút folytonos, örökifjú eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?
7. Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.
- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
(b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mennyi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?
8. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y = X^2$ Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét.
9. Legyen $X \sim \text{Uni}(0, 1)$. Adjuk meg az alábbi valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

$$(a) Y = \sqrt{2X} \quad (b) V = \ln\left(\frac{1}{X}\right) \quad (c) Z = \arctan(X)$$