

5. Gyakorlat

Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, abszolút folytonos valószínűségi változók, eloszlások transzformációi

Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény) Legyen X valószínűségi változó. Ekkor $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X eloszlásfüggvénye, ha

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Az eloszlásfüggvény minden valószínűségi változó esetén létezik.

Tétel Az $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény pontosan, akkor eloszlásfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak, ha az alábbiak teljesülnek

1. F monoton nő
2. F jobbról folytonos: $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = F(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Definíció (Sűrűségfüggvény) Legyen X valószínűségi változó. Ekkor $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X sűrűségfüggvénye, ha

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds.$$

Amennyiben létezik, akkor X abszolút folytonos valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges (mérhető) $B \subseteq \mathbb{R}$ esetén (nekünk a legtöbbször egy intervallum)

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(s) ds.$$

Tétel Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pontosan akkor sűrűségfüggvénye egy valószínűségi változónak, ha teljesülnek az alábbiak

1. $f \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Várható érték abszolút folytonos esetben

Definíció (Várható érték abszolút folytonos esetben) Legyen X valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx,$$

amennyiben az integrál abszolút konvergens.

Állítás (Transzformált várható értéke abszolút folytonos esetben) Legyen X valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $g(X)$ várható értéke (amennyiben abszolút konvergens az integrál)

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.$$

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes: $\text{Uni}(a, b)$. Az exponenciális eloszlás $\lambda > 0$ paraméterrel: $\text{Exp}(\lambda)$.

$X \sim$	$\text{Ran}(X)$	$F(x)$	$f(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
$\text{Uni}(a, b)$	$a \leq x \leq b$	$(x - a)/(b - a)$	$1/(b - a)$	$(a + b)/2$	$(b - a)^2/12$
$\text{Exp}(\lambda)$	$0 \leq x$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Megjegyzés Az exponenciális és a geometriai eloszlás örökifjú. Az X örökifjú, ha minden $s, t \geq 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Másfelől az exponenciális az egyetlen abszolút folytonos örökifjú eloszlás.

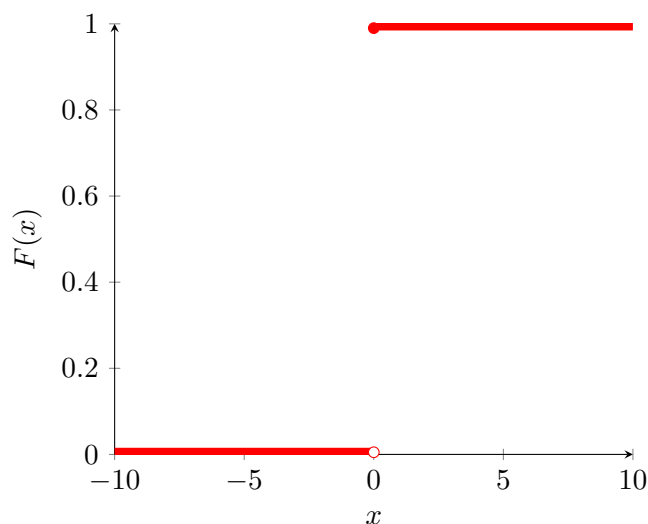
Feladatok

1. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények?

$$(a) F(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (b) F(x) = 1 - e^{-x^2} \quad (c) F(x) = e^{-e^{-x}} \quad (d) F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$$

Megoldás

(a) Ábrázolva



Ekkor

- i. F nyilvánvalóan monoton nő
- ii. F folytonos a nulla hely kivételével, de itt is jobbról folytonos:

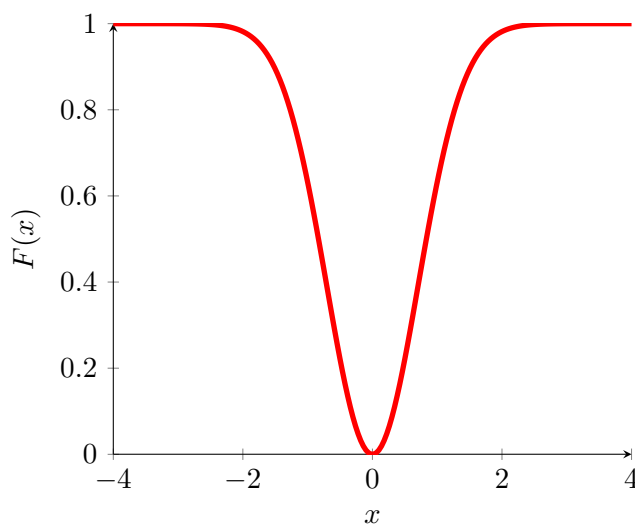
$$\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = 0 = F(0).$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Az F függvény valóban eloszlásfüggvény.

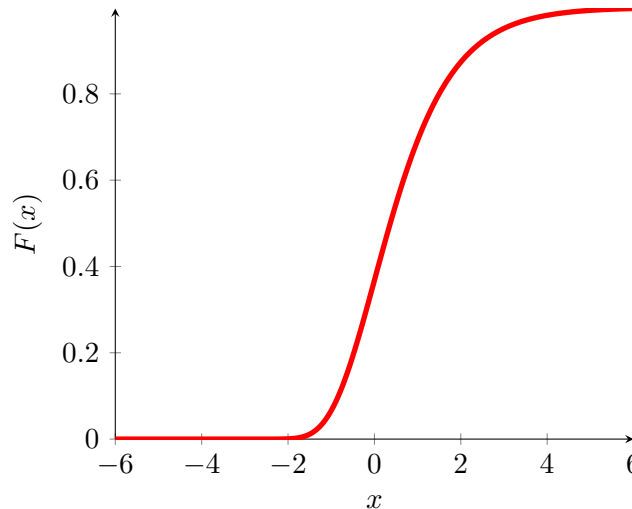
(b) Ábrázolva



Látható, hogy nem lesz eloszlásfüggvény, mert például

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x^2} = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

(c) Ábrázolva



Ekkor

i. F monoton nő, hiszen minden x -re

$$F'(x) = e^{-e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = e^{-e^{-x}} e^{-x} > 0$$

ii. F folytonos függvény, így jobbról is folytonos

iii.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-x}} = e^{-e^{\infty}} = e^{-\infty} = 0.$$

iv.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} = e^{-e^{-\infty}} = e^{-0} = 1.$$

Azt kaptuk, hogy F eloszlásfüggvény.

(d) Nem lehet eloszlásfüggvény, hiszen az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény csak a nemnegatív valós számokra értelmezett. Továbbá $x \mapsto \arcsin(x)$ csak a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett. Ezért F értelmezési tartománya $[0, 1]$, de egy eloszlásfüggvénynek minden valós számra értelmezve kell, hogy legyen.

2. Tudjuk, hogy az alábbi f függvény az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg α értékét.
- (b) Adjuk meg X eloszlásfüggvényt.
- (c) Adjuk meg a $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ valószínűséget.
- (d) Számítsuk ki X várható értékét és szórását.

Megoldás

(a) Amennyiben sűrűségfüggvény, akkor

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 \alpha(2x - x^2) dx = \alpha \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{3}\alpha.$$

Innen $\alpha = \frac{3}{4}$ kell, hogy legyen. Ez a választás jó, hiszen ekkor a függvény nemnegatív marad:

$$\frac{3}{4}(2x - x^2) = \frac{3}{4}x(2 - x) > 0, \quad \text{ha } 0 < x < 2.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\alpha = \frac{3}{4}.$$

(b) A sűrűségfüggvény definíciója szerint

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds.$$

Vizsgáljuk meg az alábbi eseteket

i. Ha $x \leq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 ds = 0.$$

ii. Ha $0 < x < 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 ds + \int_0^x \frac{3}{4}(2s - s^2) ds = \frac{3}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3.$$

iii. Ha $2 \leq x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 ds + \underbrace{\int_0^2 \frac{3}{4}(2s - s^2) ds}_{=1} + \int_2^x 0 ds = 1.$$

Azt kaptuk, hogy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{ha } 2 \leq x \end{cases}$$

(c) A keresett valószínűség a sűrűségfüggvénnyel kifejezve

$$\mathbb{P}(-1 < X < 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(2x - x^2) dx = \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

De ugyanígy ki tudjuk fejezni az eloszlásfüggvénnyel, kihasználva, hogy X folytonos valószínűségi változó (ezért $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 < X < 1) &= \mathbb{P}(X < 1) - \mathbb{P}(X \leq -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X \leq -1) = F(1) - F(-1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^3 - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) A várható érték folytonos esetben

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{3}{4}(2x - x^2) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = 1.$$

A második momentum

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \frac{3}{4}(2x - x^2) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{6}{5}.$$

Innen a variancia

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}.$$

Amiből a szórás

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

Megoldás Legyen X a heti fogyasztás (ezer literben), továbbá $0 < C < 1$ a kapacitás (ezer literben). Ekkor a keresett egyenlőtlenség

$$0.01 > \mathbb{P}(\text{kifogy a benzinkút az üzemanyagból}) = \mathbb{P}(X > C).$$

Használjuk X sűrűségfüggvényét

$$\mathbb{P}(X > C) = \int_C^\infty f(x) dx = \int_C^1 5(1-x)^4 dx = \left[-(1-x)^5 \right]_{x=C}^{x=1} = (1-C)^5.$$

Amiből

$$0.01 > (1-C)^5.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$C > 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6019.$$

Vagyis egy legalább 602 literes tartály már megfelelő.

4. A $[0, 1]$ intervallumon találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P és a 0.3 pont közötti távolságot. Határozzuk meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Megoldás Legyen X a P pont és 0.3 távolsága. Ekkor vegyük észre, hogy $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 0.7) = 1$, hiszen a legtávolabb akkor lehetünk, ha $P = 1$.

Az X eloszlásfüggvénye definíció alapján

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

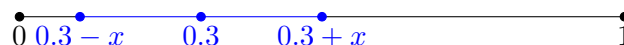
Ekkor a korábbi megállapítás alapján triviálisan

(i) Ha $x < 0$, akkor $F_X(x) = 0$

(ii) Ha $0.7 \leq x$, akkor $F_X(x) = 1$.

Másfelől vegyük észre, hogy $\{X \leq x\}$ pontosan az az esemény, hogy a P pontot a 0.3 pont x sugarú (zárt) környezetéből választjuk. Ekkor két további esetet kell megkülönböztetni

(iii) Ha $0 \leq x < 0.3$. Ekkor azon P pontok halmaza amire $\{X \leq x\}$ teljesül az alábbi.



Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy pont a **halmazba** esik a hosszak aránya lesz (geometriai valószínűség), vagyis

$$F_X(x) = \frac{2x}{1} = 2x.$$

(iv) Ha $0.3 \leq x < 0.7$. Ekkor azon P pontok halmaza amire $\{X \leq x\}$ teljesül az alábbi.



Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy pont a **halmazba** esik a hosszak aránya lesz (geometriai valószínűség), vagyis

$$F_X(x) = \frac{0.3+x}{1} = x + \frac{3}{10}.$$

Ekkor az (i)-(iv) pontokat összefoglalva az X eloszlásfüggvénye az alábbi.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 2x & \text{ha } 0 \leq x < \frac{3}{10} \\ x + \frac{3}{10} & \text{ha } \frac{3}{10} \leq x < \frac{7}{10} \\ 1 & \text{ha } \frac{7}{10} \leq x \end{cases}$$

Mivel F_X folytonos függvény és véges sok pont kivételével differenciálható, ezért az X sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x).$$

Ekkor a differenciálás után azt kapjuk, hogy X sűrűségfüggvénye az alábbi.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 \leq x < \frac{3}{10} \\ 1 & \text{ha } \frac{3}{10} \leq x < \frac{7}{10} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

5. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot $1 - e^{-\frac{2}{3}}$. Feltehetjük, hogy egy hullócsillag észleléséig hátralévő idő nem függ az eddig eltelt idő hosszától (azaz az eloszlás abszolút folytonos, örökifjú).

(a) Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában?

(b) Mekkora az első hullócsillag észleléséig hátralévő idő várható értéke és szórása?

Megoldás Legyen X az első hullócsillagig eltelt idő percekben. Ekkor mivel feltehető, hogy X folytonos és örökifjú, ezért ez pontosan azt jelenti, hogy

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{2}{3}} &= \mathbb{P}(\text{az első 20 percben látunk hullócsillagot}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 20) \\ &= 1 - e^{-\lambda \cdot 20}. \end{aligned}$$

Az egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $\lambda = \frac{1}{30}$.

(a) A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{látunk hullócsillagot az első órában}) &= \mathbb{P}(X \leq 60) \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{30} \cdot 60} \\ &= 1 - e^{-2} \\ &\approx 0.8647. \end{aligned}$$

(b) Mivel $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{30})$, ezért

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 30 \quad \text{és} \quad \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda} = 30.$$

6. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig, és az első meghibásodás időpontja abszolút folytonos, örökifjú eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?

Megoldás Legyen X az első meghibásodásig eltelt idő években. Mivel tudjuk, hogy X folytonos és örökifjú, ezért

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Továbbá tudjuk, hogy átlagosan 2 évig működik egy mosógép hibátlanul, így

$$2 = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda},$$

amiből $\lambda = 2$.

A keresett valószínűség használva az örökifjúságot (és, hogy X folytonos)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3 | X \geq 2) &= \mathbb{P}(X \geq 2 + 1 | X \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(X \geq 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) \\ &= 1 - F_X(1) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.6065. \end{aligned}$$

7. Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
- (b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mennyi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

Megoldás Legyen X a busz érkezéséig eltelt idő percben. Ekkor a feladat szövege szerint

$$X \sim \text{Uni}(0, 30).$$

- (a) A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{legalább 10 percet kell várnunk}) &= \mathbb{P}(X \geq 10) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 10) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) \\ &= 1 - F_X(10) \\ &= 1 - \frac{10 - 0}{30} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- (b) A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 15 + 10 | X \geq 15) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 25, X \geq 15)}{\mathbb{P}(X \geq 15)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 25)}{\mathbb{P}(X \geq 15)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq 25)}{1 - \mathbb{P}(X \leq 15)} \\ &= \frac{1 - F_X(25)}{1 - F_X(15)} \\ &= \frac{1 - \frac{25}{30}}{1 - \frac{15}{30}} \\ &= \frac{\frac{5}{30}}{\frac{15}{30}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

8. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y = X^2$ Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét.

Megoldás Az Y eloszlásfüggvénye

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y).$$

Ekkor

(i) Ha $y < 0$, akkor

$$F_Y(y) = 0.$$

Ekkor a sűrűség

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 0.$$

(ii) Ha $0 \leq y$, akkor mivel $\text{Ran}(X) = [0, \infty)$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Ekkor a sűrűség

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) = F'_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Vagyis Y sűrűségfüggvénye

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}} & \text{ha } 0 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az Y várható értéke

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

9. Legyen $X \sim \text{Uni}(0, 1)$. Adjuk meg az alábbi valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

$$(a) Y = \sqrt{2X} \quad (b) V = \ln\left(\frac{1}{X}\right) \quad (c) Z = \arctan(X)$$

Megoldás Használjuk minden esetben, hogy $\text{Ran}(X) = [0, 1]$. Illetve, hogy

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Mivel $Y = \sqrt{2X}$, ezért $\text{Ran}(Y) = [0, \sqrt{2}]$. Ekkor $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ esetén

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\sqrt{2X} \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y^2}{2}\right) = F_X\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Amiből a sűrűség

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y^2}{2}\right) = F'_X\left(\frac{y^2}{2}\right) \cdot y = f_X\left(\frac{y^2}{2}\right) \cdot y = y.$$

Azt kaptuk, hogy Y sűrűségfüggvénye

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & \text{ha } 0 \leq y \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(b) Mivel $V = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$, ezért $\text{Ran}(V) = [0, \infty)$. Ekkor $v \geq$ esetén

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{1}{X}\right) \leq v\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq e^v\right) \\ &= \mathbb{P}(X \geq e^{-v}) = 1 - \mathbb{P}(X \leq e^{-v}) = 1 - F_X(e^{-v}). \end{aligned}$$

Amiből a sűrűség

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = \frac{d}{dv} (1 - F_X(e^{-v})) = -F'_X(e^{-v}) \cdot (-e^{-v}) = f_X(e^{-v}) \cdot e^{-v} = e^{-v}.$$

Azt kaptuk, hogy V sűrűségfüggvénye

$$f_V(v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{ha } 0 \leq v \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megjegyezhetjük, hogy ekkor $V \sim \text{Exp}(1)$.

(c) Mivel $Z = \arctan(X)$, ezért $\text{Ran}(Z) = [0, \frac{\pi}{4}]$. Ekkor $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$ esetén

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\arctan(X) \leq z) = \mathbb{P}(X \leq \tan(z)) = F_X(\tan(z)).$$

Ekkor a sűrűség

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} F_X(\tan(z)) = F'_X(\tan(z)) \cdot \frac{1}{\cos^2(z)} = f_X(\tan(z)) \cdot \frac{1}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)}.$$

Azt kaptuk, hogy Z sűrűségfüggvénye

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(z)} & \text{ha } 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$