

6. Gyakorlat

Poisson-folyamat

Poisson-folyamat

Definíció (Poisson-folyamat) Jelölje $N(t)$ annak a számát, hogy az A esemény a $t \geq 0$ ideig hányszor következett be. Ekkor $(N(t) : t \geq 0)$ egy Poisson folyamat $\lambda > 0$ intenzitással, amennyiben

1. $N(0) = 0$
2. $N(s+t) - N(s) \sim \text{Poi}(t \cdot \lambda)$
3. $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ esetén

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

függetlenek.

Tétel Legyenek $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$ független $\text{Exp}(\lambda)$ valószínűségi változók. Továbbá

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Ekkor

$$N(t) = \max \{n \geq 1 : T_n \leq t\}$$

Poisson-folyamat λ intenzitással. Másfelől minden Poisson pontfolyamat előállítható, így.

Megjegyzés Ez pontosan azt jelenti, hogy az A esemény két bekövetkezése között eltelt idő $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású.

Állítás Az n -edik bekövetkezésig eltelt idő eloszlása $\text{Gamma}(n, \lambda)$ (vagy $\text{Erlang}(n, \lambda)$). Az eloszlásfüggvénye

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t \cdot \lambda} \frac{(t \cdot \lambda)^k}{k!}.$$

Poisson-folyamat ritkítása

Állítás Egy λ intenzitású Poisson-folyamatban az A esemény minden bekövetkezését egymástól függetlenül p valószínűséggel tartjuk meg. Ekkor az új folyamat egy Poisson-folyamat $p \cdot \lambda$ intenzitással.

Független Poisson-folyamatok összege

Állítás Legyenek $N_1(t), \dots, N_k(t)$ független Poisson-folyamatok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ intenzitással. Ekkor $N_1(t) + \dots + N_k(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ intenzitással.

Feltételes valószínűség Poisson-folyamatra

Állítás Legyen $N(t)$ egy Poisson-folyamat. Ekkor minden $0 \leq s < t$ és $0 \leq k \leq n$ esetén

$$\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

Vagyis a feltételes eloszlás $N(s) \mid N(t) = n \sim \text{Bin}(n, \frac{s}{t})$.

Feladatok

1. A budapesti 12. kerületi Zugligeti úton átlagosan percenként 6 autó halad Poisson-folyamat szerint. Egy vaddisznó az erdőből kilépve megpróbál átkelni az úton. Mennyi a valószínűsége, hogy a vaddisznó ütközik egy autóval, amennyiben
 - (a) 6 másodpercre van szüksége az átkeléshez?
 - (b) 3 másodpercre van szüksége az átkeléshez?
2. Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz, $1 - e^{-\frac{1}{8}t}$.
 - (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk?
 - (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percet, de kevesebb mint 10 percet kell várakoznunk?
 - (c) Mennyi a várakozási időnk várható értéke?
 - (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?
 - (e) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1 órán belül legalább 5 busz érkezik?
3. A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.
 - (a) Várhatóan hány percig állok ott, mire megérkezik?
 - (b) Mi a várakozási időm eloszlása?
 - (c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?
4. Az M1 autópálya szélén hetente átlagosan két elhagyatott autót találnak. A talált autók felén már nincsenek rajta a kerekek. Mennyi a valószínűsége, hogy
 - (a) január első hetében egy kocsit sem találtak, akkor a második héten sem fognak?
 - (b) az idén elsőnek megtalált kerék nélküli autóra több, mint 8 napot kellett várni?
 - (c) 20 nap alatt több, mint 4 kocsit találtak?
 - (d) nem lesz meg a 6. kocsi még januárban?
5. A campus közelében spotolt kutyák száma Poisson eloszlású 3/nap várható értékkel, a kacsáké szintén Poisson, 2/nap várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy
 - (a) két nap alatt több, mint 3 kacsát látok?
 - (b) az első két állat felbukkanása között több, mint egy nap telik el? (állat = kacsa v. kutya)
 - (c) ha 6 órája nem láttam kutyát, még több mint 2 órát kell várnom, míg látok egyet?
 - (d) a 4. kacsa 3 napon belül bukkan fel?
 - (e) ha valaki izgatottságában csak azt tudja elmesélni, hogy 5 állatot látott egy nap alatt, mennyi a valószínűsége, hogy abból 4 kutya volt?
6. Egy adott régióban évente várhatóan 3 földrengés van.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt több, mint 2 földrengés lesz?
 - (b) Menni a valószínűsége, hogy ha egy földrengés után már eltelt 1 hónap, akkor még legalább egy hónapot kell várni a következőre?
 - (c) Ha az év első felében volt már egy földrengés, mennyi a valószínűsége, hogy a másodikban is lesz legalább egy?
 - (d) Mennyi a valószínűsége, hogy az 5. földrengés 8 hónapon belül lesz?