

6. Gyakorlat

Poisson-folyamat

Poisson-folyamat

Definíció (Poisson-folyamat) Jelölje $N(t)$ annak a számát, hogy az A esemény a $t \geq 0$ ideig hányszor következett be. Ekkor $(N(t) : t \geq 0)$ egy Poisson folyamat $\lambda > 0$ intenzitással, amennyiben

1. $N(0) = 0$
2. $N(s+t) - N(s) \sim \text{Poi}(t \cdot \lambda)$
3. $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ esetén

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

függetlenek.

Tétel Legyenek $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$ független $\text{Exp}(\lambda)$ valószínűségi változók. Továbbá

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Ekkor

$$N(t) = \max \{n \geq 1 : T_n \leq t\}$$

Poisson-folyamat λ intenzitással. Másfelől minden Poisson pontfolyamat előállítható, így.

Megjegyzés Ez pontosan azt jelenti, hogy az A esemény két bekövetkezése között eltelt idő $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlású.

Állítás Az n -edik bekövetkezésig eltelt idő eloszlása $\text{Gamma}(n, \lambda)$ (vagy $\text{Erlang}(n, \lambda)$). Az eloszlásfüggvénye

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t \cdot \lambda} \frac{(t \cdot \lambda)^k}{k!}.$$

Poisson-folyamat ritkítása

Állítás Egy λ intenzitású Poisson-folyamatban az A esemény minden bekövetkezését egymástól függetlenül p valószínűséggel tartjuk meg. Ekkor az új folyamat egy Poisson-folyamat $p \cdot \lambda$ intenzitással.

Független Poisson-folyamatok összege

Állítás Legyenek $N_1(t), \dots, N_k(t)$ független Poisson-folyamatok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ intenzitással. Ekkor $N_1(t) + \dots + N_k(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ intenzitással.

Feltételes valószínűség Poisson-folyamatra

Állítás Legyen $N(t)$ egy Poisson-folyamat. Ekkor minden $0 \leq s < t$ és $0 \leq k \leq n$ esetén

$$\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

Vagyis a feltételes eloszlás $N(s) \mid N(t) = n \sim \text{Bin}(n, \frac{s}{t})$.

Feladatok

1. A budapesti 12. kerületi Zugligeti úton átlagosan percenként 6 autó halad Poisson-folyamat szerint. Egy vaddisznó az erdőből kilépve megpróbál átkelni az úton. Mennyi a valószínűsége, hogy a vaddisznó ütközik egy autóval, amennyiben

- (a) 6 másodpercre van szüksége az átkeléshez?
- (b) 3 másodpercre van szüksége az átkeléshez?

Megoldás Legyen $N(t)$ a $t \geq 0$ másodpercig érkezett autók száma. Ekkor a feladat szövege szerint ez egy Poisson-folyamat. Továbbá, mivel percenként átlagosan 6 autó érkezik, így másodpercenként átlagosan $\lambda = \frac{1}{10}$, így ez lesz a Poisson-folyamat intenzitása.

- (a) Amennyiben t_0 időpontban indul el a vaddisznó, akkor pontosan akkor lesz ütközés, ha t_0 és $t_0 + 6$ között érkezik autó, vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(t_0 + 6) - N(t_0) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N(t_0 + 6) - N(t_0) = 0).$$

Azonban tudjuk, hogy

$$N(t_0 + 6) - N(t_0) \sim \text{Poi}\left(6 \cdot \frac{1}{10}\right) = \text{Poi}\left(\frac{3}{5}\right).$$

Vagyis

$$\mathbb{P}(N(t_0 + 6) - N(t_0) \geq 1) = 1 - e^{-\frac{3}{5}} \approx 0.4512.$$

- (b) Teljesen analóg módon, mivel

$$N(t_0 + 3) - N(t_0) \sim \text{Poi}\left(3 \cdot \frac{1}{10}\right) = \text{Poi}\left(\frac{3}{10}\right),$$

ezért

$$\mathbb{P}(N(t_0 + 3) - N(t_0) \geq 1) = 1 - e^{-\frac{3}{10}} \approx 0.2592.$$

2. Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz, $1 - e^{-\frac{1}{8}t}$.
- (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 perccel kell várakoznunk?
 - (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 perccel, de kevesebb mint 10 perccel kell várakoznunk?
 - (c) Mennyi a várakozási időnk várható értéke?
 - (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 perccel, akkor kell még várnunk legalább 10 perccel?
 - (e) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1 órán belül legalább 5 busz érkezik?

Megoldás Legyen X a busz érkezéséig eltelt idő. A feladat szerint

$$\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{8}t},$$

amiből

$$X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{8}\right).$$

A továbbiakban használjuk, hogy X folytonos, vagyis $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$.

- (a) A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - F_X(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 10}) = e^{-\frac{5}{4}} \approx 0.2865.$$

- (b) A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X < 5 < 10) = \mathbb{P}(X < 10) - \mathbb{P}(X < 5) = F_X(10) - F_X(5) = e^{-\frac{5}{8}} - e^{-\frac{5}{4}} \approx 0.2488$$

- (c) Az átlagos várakozási idő

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \text{ (perc)}.$$

- (d) Az örökifjúságot használva

$$\mathbb{P}(X \geq 4 + 10 \mid X \geq 4) = \mathbb{P}(X \geq 10) = e^{-\frac{5}{4}} \approx 0.2865.$$

- (e) Mivel a buszok között eltelt idő egymástól független exponenciális eloszlású
- $\frac{1}{8}$
- paraméterrel, ezért a
- $t \geq 0$
- percig érkezett buszok száma
- $N(t)$
- Poisson-folyamat lesz
- $\frac{1}{8}$
- intenzitással. Vagyis, ha
- $N(60)$
- az első 60 percben érkezett buszok száma, akkor

$$N(60) = N(60) - N(0) \sim \text{Poi}\left(60 \cdot \frac{1}{8}\right) = \text{Poi}\left(\frac{15}{2}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(60) \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(N(60) \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 \mathbb{P}(N(60) = k) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-\frac{15}{2}} \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^k}{k!} \approx 0.8679.$$

3. A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.

- (a) Várhatóan hány percig állok ott, mire megérkezik?
 (b) Mi a várakozási időm eloszlása?
 (c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?

Megoldás

- (a) Legyen τ_1, τ_2, τ_3 az első, második és harmadik buszra szükséges várakozási idő percben. Ekkor a feladat szerint függetlenek és $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlásúak. Továbbá tudjuk, hogy

$$5 = \mathbb{E}(\tau_j) = \frac{1}{\lambda} \quad (j = 1, 2, 3),$$

ezért $\lambda = \frac{1}{5}$. Mivel a barátomra pontosan $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ percek kell várnom, ezért várhatóan

$$\mathbb{E}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = \mathbb{E}(\tau_1) + \mathbb{E}(\tau_2) + \mathbb{E}(\tau_3) = 5 + 5 + 5 = 15$$

percet kell várnom.

- (b) Mivel amennyiben $N(t)$ a $t \geq 0$ idő alatt beérkezett buszok száma, akkor mivel két busz között eltelt idő független exponenciális eloszlású $\frac{1}{5}$ paraméterrel, így ez egy Poisson-folyamat lesz $\frac{1}{5}$ intenzitással. Ekkor az első három bekövetkezésig eltelt idő eloszlása Gamma ((vagy Erlang) eloszlású lesz 3 és $\frac{1}{5}$ paraméterekkel

$$\text{Gamma}\left(3, \frac{1}{5}\right) = \text{Erlang}\left(3, \frac{1}{5}\right).$$

- (c) Mivel a buszok között eltelt idő független, így ez a rész teljesen azzal egyenértékű, mintha a barátom a második busszal érkezne. Így az előzőek alapján a várakozási időm várható értéke

$$5 + 5 = 10$$

és a várakozási időm eloszlása

$$\text{Gamma}\left(2, \frac{1}{5}\right) = \text{Erlang}\left(2, \frac{1}{5}\right).$$

4. Az M1 autópálya szélén hetente átlagosan két elhagyatott autót találnak. A talált autók felén már nincsenek rajta a kerekek. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) január első hetében egy kocsit sem találtak, akkor a második héten sem fognak?
- (b) az idén elsőnek megtalált kerék nélküli autóra több, mint 8 napot kellett várni?
- (c) 20 nap alatt több, mint 4 kocsit találtak?
- (d) nem lesz meg a 6. kocsi még januárban?

Megoldás Legyen $N(t)$ az évben a $t \geq 0$ hétig talált autók száma. Ekkor feltehető, hogy $N(t)$ egy Poisson-folyamat. Mivel egy héten átlagosan 2 autót találnak, így az intenzitása $\lambda = 2$.

- (a) A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(2) - N(1) = 0 \mid N(1) = 0) = \frac{\mathbb{P}(N(2) - N(1) = 0, N(1) = 0)}{\mathbb{P}(N(1) = 0)} = \frac{\mathbb{P}(N(2) = 0)}{\mathbb{P}(N(1) = 0)}.$$

Mivel Poisson-folyamat $\lambda = 2$ intenzitással, így

$$N(1) \sim \text{Poi}(1 \cdot 2) = \text{Poi}(2) \quad \text{és} \quad N(2) \sim \text{Poi}(2 \cdot 2) = \text{Poi}(4).$$

Ekkor

$$\frac{\mathbb{P}(N(2) = 0)}{\mathbb{P}(N(1) = 0)} = \frac{e^{-4}}{e^{-2}} = e^{-2} \approx 0.1353.$$

- (b) Legyen $N_1(t)$ az évben a $t \geq 0$ hétig talált kerék nélküli autók száma. Ekkor mivel átlagosan az autótól felén nincsen kerék, ezért a Poisson-folyamat ritkítása miatt $N_1(t)$ is egy Poisson-folyamat lesz $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ intenzitással.

Ekkor az első 8 nap alatt megtalált kerék nélküli autók száma

$$N_1\left(\frac{8}{7}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{8}{7} \cdot 1\right) = \text{Poi}\left(\frac{8}{7}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(N_1\left(\frac{8}{7}\right) = 0\right) = e^{-\frac{8}{7}} \approx 0.3189.$$

- (c) Tudjuk, hogy

$$N\left(\frac{20}{7}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{20}{7} \cdot 2\right) = \text{Poi}\left(\frac{40}{7}\right).$$

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(N\left(\frac{20}{7}\right) > 4\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N\left(\frac{20}{7}\right) \leq 4\right) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-\frac{40}{7}} \frac{1}{k!} \left(\frac{40}{7}\right)^k \approx 0.6749.$$

- (d) Mivel január 31 napos, továbbá

$$N\left(\frac{31}{7}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{31}{7} \cdot 2\right) = \text{Poi}\left(\frac{62}{7}\right).$$

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(N\left(\frac{31}{7}\right) < 6\right) = \mathbb{P}\left(N\left(\frac{31}{7}\right) \leq 5\right) = \sum_{k=0}^5 e^{-\frac{62}{7}} \frac{1}{k!} \left(\frac{62}{7}\right)^k \approx 0.1246.$$

5. A campus közelében spotolt kutyák száma Poisson eloszlású 3/nap várható értékkel, a kacsáké szintén Poisson, 2/nap várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) két nap alatt több, mint 3 kacsát látok?
- (b) az első két állat felbukkanása között több, mint egy nap telik el? (állat = kacsa v. kutya)
- (c) ha 6 órája nem láttam kutyát, még több mint 2 órát kell várnom, míg látok egyet?
- (d) a 4. kacsa 3 napon belül bukkan fel?

- (e) ha valaki izgatottságában csak azt tudja elmesélni, hogy 5 állatot látott egy nap alatt, mennyi a valószínűsége, hogy abból 4 kutya volt?

Megoldás Legyen $N_1(t)$ és $N_2(t)$ campus közelében spotolt kutyák és kacsák száma a $t \geq 0$ napig. Ekkor a feladat szerint Poisson-folyamatotok $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 2$ intenzitással.

- (a) Mivel $N_2(2)$ a 2 nap alatt látott kacsák száma, ekkor tudjuk

$$N_2(2) \sim \text{Poi}(2 \cdot 2) = \text{Poi}(4).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N_2(2) > 3) = 1 - \mathbb{P}(N_2(2) \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^3 e^{-4} \frac{4^k}{k!} \approx 0.5665.$$

- (b) Mivel amennyiben $N(t)$ a $t \geq 0$ napig látott állatok száma, akkor $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Ekkor $N(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3 + 2 = 5$ intenzitással. Ekkor amennyiben τ az első két állat felbukkanása között eltelt idő napokban, akkor

$$\tau \sim \text{Exp}(5).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\tau > 0) = 1 - \mathbb{P}(\tau \leq 1) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 1}) = e^{-5} \approx 0.0067.$$

- (c) Legyen τ_1 két kutya észlelése között eltelt idő. Ekkor tudjuk, hogy $\tau \sim \text{Exp}(3)$, amiből az örökifjúságot használva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau_1 > \frac{6}{26} + \frac{2}{24} \mid \tau_1 > \frac{6}{24}\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_1 > \frac{2}{24}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\tau_1 \leq \frac{1}{12}\right) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{12}}) = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.7788. \end{aligned}$$

- (d) A 3 napon belül észlelt kacsák száma

$$N_2(3) \sim \text{Poi}(3 \cdot 2) = \text{Poi}(3).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(3) < 4) = 1 - \mathbb{P}(N(3) \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^3 e^{-6} \frac{6^k}{k!} \approx 0.8488.$$

- (e) Mivel amennyibe K az 5 állat közül a kutyák száma, akkor $K \sim \text{Bin}(5, 3/5)$, ezért a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(K = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{625} = 0.2592.$$

6. Egy adott régióban évente várhatóan 3 földrengés van.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt több, mint 2 földrengés lesz?
 (b) Menni a valószínűsége, hogy ha egy földrengés után már eltelt 1 hónap, akkor még legalább egy hónapot kell várni a következőre?
 (c) Ha az év első felében volt már egy földrengés, mennyi a valószínűsége, hogy a másodikban is lesz legalább egy?
 (d) Mennyi a valószínűsége, hogy az 5. földrengés 8 hónapon belül lesz?

Megoldás Legyen $N(t)$ a $t \geq 0$ évig bekövetkezett földrengések száma. Ekkor feltehető, hogy $N(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda = 3$ intenzitással.

- (a) A 4 hónap alatt bekövetkezett földrengések száma

$$N\left(\frac{4}{12}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{4}{12} \cdot 3\right) = \text{Poi}(1).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(N\left(\frac{4}{12}\right) > 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N\left(\frac{4}{12}\right) \leq 2\right) = 1 - \sum_{k=0}^2 e^{-1} \frac{1}{k!} \approx 0.0803.$$

- (b) Amennyiben
- X
- két földrengés között eltelt idő (években), akkor
- $X \sim \text{Exp}(3)$
- . Ekkor az örökifjúságot használva

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \mid X > \frac{1}{12}\right) = \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{12}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{12}\right) = 1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{12}} = 1 - e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.7788.$$

- (c) Az első és második félévben bekövetkezett földrengések száma

$$N\left(\frac{1}{2}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{és} \quad N(1) - N\left(\frac{1}{2}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Ekkor azonban a két valószínűségi változó független. Ekkor a keresett valószínűség a függetlenség miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N(1) - N\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 \mid N\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1\right) &= \mathbb{P}\left(N(1) - N\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(N(1) - N\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.4866. \end{aligned}$$

- (d) A nyolc hónapon belüli földrengések száma

$$N\left(\frac{8}{12}\right) \sim \text{Poi}\left(\frac{8}{12} \cdot 3\right) = \text{Poi}(2).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(N\left(\frac{8}{12}\right) \geq 5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N\left(\frac{8}{12}\right) \leq 4\right) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-2} \frac{2^k}{k!} \approx 0.0527.$$