

7. Gyakorlat

Normális eloszlás és a Centrális Határeloszlás Tétel

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás) Az $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ valószínűségi változó normális eloszlást követ $\mu \in \mathbb{R}$ várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással, amennyiben a sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right).$$

Definíció (Standard normális eloszlás) Az $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük. Ekkor a sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét az alábbi módon jelöljük

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{és} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds.$$

Ekkor egy hasznos azonosság:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Standardizálás

Állítás Amennyiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlást követ, akkor minden lineáris transzformáltja normális eloszlást követ. Vagyis

$$X + b \sim \mathcal{N}(\mu + b, \sigma^2) \quad \text{és} \quad aX \sim \mathcal{N}(a \cdot \mu, a^2 \cdot \sigma^2).$$

Következmény (Standardizálás) Legyen $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ekkor

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Centrális Határeloszlás Tétel (CHT)

Tétel (Centrális Határeloszlás Tétel) Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók $\mu \in \mathbb{R}$ várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén amennyiben $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Következmény A CHT két speciális esete:

- Amennyiben $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Vagyis $\text{Bin}(n, p)$ "jól közelíthető" $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ eloszlással.

Ez igaz, mert X_n eloszlása megegyezik $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ eloszlásával, ahol Z_j -k független azonos eloszlásúak: $\mathbb{P}(Z_j = 1) = p$ és $\mathbb{P}(Z_j = 0) = 1 - p$. Vagyis $Z_j \sim \text{Ber}(p)$.

- Amennyiben $Y_j \sim \text{Poi}(\lambda)$, független azonos eloszlásúak, akkor $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim \text{Poi}(n\lambda)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Vagyis $\text{Poi}(n\lambda)$ "jól közelíthető" $\mathcal{N}(n\lambda, n\lambda)$ eloszlással.

Feladatok

1. Az A4-et tanuló diákok végső százalékpontos eredményei normális eloszlásúnak tekinthetők 65 várható értékkel és 15 szórással.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű diák középest kap (azaz, a pontja 60 és 70 pont közé esik)?
 - (b) Az átment diákok (azok, akik legalább 50 pontot értek el) hány százaléka kap középest?
2. Legyen A normális eloszlású valószínűségi változó 2 várható értékekkel és 3 szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz az $A \cdot x^2 + 2x + 1$ egyenletnek valós gyöke?
3. Egy BME-VIK évfolyamon 500 diák hallgat egy tárgyat. A vizsgadolgozat előtt konzultációt szerveznek. Előzetes felmérések szerint a hallgatók külön-külön, egymástól függetlenül 0,25 valószínűséggel jönnek el a konzultációra. Hány fős terem kell ahhoz, hogy a konzultációra érkező hallgatók 90%-os biztonsággal mind elférjenek a teremben?
4. Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mennyi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?
5. Egy részfeladat elkészítéséhez szükséges idő mennyisége $\text{Uni}(1, 3)$ eloszlású, ahol az egyes részfeladatokhoz szükséges idők mennyiségei (együttesen) függetlenek. A részfeladatokat egymás után végezzük. Ezer részfeladat esetén mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 1984 időegység alatt elkészülünk?
6. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meg nem haladja a 300-at. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükségünk!
7. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 db független azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0, 30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen valószínűségi változó eloszlása a $[0, 1]$ intervallumon
 - (a) egyenletes?
 - (b) a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$?
8. Egy kereskedelmi rádió 100 zeneszámot ismételget úgy, hogy a következő számot mindig a korábbiaktól függetlenül választja, azonos valószínűséggel a 100 lehetséges szám közül (így ugyanaz a szám akár egymás után többször is előfordulhat). A 100 szám közül az egyik Angéla kedvenc száma. Angéla bekapcsolja a rádiót, és addig hallgatja, amíg a kedvenc számát századszorra végig nem hallgatta, aztán kikapcsolja a rádiót. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy Angéla a rádió kikapcsolása előtt legalább 10 200 számot hallgat végig.