

8. Gyakorlat

Konvolúció és eloszlástranszformációk

Konvolúció

Állítás Legyen X és Y két független valószínűségi változó. Ekkor

- Amennyiben X és Y is diszkrét (egész értékészlettel), akkor $X + Y$ súlyfüggvénye

$$\mathbb{P}(X + Y = m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = m - k).$$

- Amennyiben X és Y is folytonos, akkor $X + Y$ sűrűségfüggvénye

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y(t - s) ds.$$

Állítás Igazak az alábbiak

- Amennyiben $X \sim \text{Bin}(n, p)$ és $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ függetlenek, akkor $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$.
- Amennyiben $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Poi}(\mu)$ függetlenek, akkor $X + Y \sim \text{Poi}(\lambda + \mu)$.
- Amennyiben $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ függetlenek, akkor $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) = \text{Erlang}(n, \lambda)$.
- Amennyiben $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ és $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ függetlenek, akkor $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Eloszlástranszformációk

Állítás Legyen X valószínűségi változó és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Továbbá legyen $Y = g(X)$. Ekkor Y eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye (ha g differenciálható és X folytonos), amennyiben

- g szigorúan monoton nő

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \cdot f_X(g^{-1}(y)).$$

- g szigorúan monoton csökken

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) \quad \text{és} \quad f_Y(y) = -\frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \cdot f_X(g^{-1}(y)).$$

Megjegyzés A fenti transzformált várható értéke (ez csak emlékeztető):

- Amennyiben X diszkrét

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \text{Ran}(X)} g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

- Amennyiben X folytonos

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.$$

Feladatok

- Legyenek X, Y, Z független $\text{Uni}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az alábbi valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.
 - $X+Y$
 - $X+Y+Z$
- Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg $X+Y$ sűrűségfüggvényét, ha tudjuk, hogy $\lambda \neq \mu$.
- Legyen X és Y független $\text{Geom}\left(\frac{1}{4}\right)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X+Y$ súlyfüggvényét. Milyen eloszlást követ $X+Y$?
- Egy hallgató egy tárgyat próbál teljesíteni az egyetemen. Minden félévben egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel szerez aláírást. Amennyiben megszerezte az aláírást megpróbálkozik a vizsgával, amit $\frac{1}{4}$ valószínűséggel teljesít sikeresen minden félévben, egymástól függetlenül (ha már megszerezte az aláírást, azt nem kell újra megszereznie a következő félévben). Adjuk meg minden k -ra, hogy mekkora valószínűséggel van k félévre szüksége a hallgatónak a tárgy elvégzéséhez.
- Kacsákat pakolunk talicskába. A tojók tömege egyenletes eloszlású 2 és 3 kg között, a gácséroké pedig 2 és 4 kg között. Mi lesz egy tojó és egy gácsér együttes tömegének sűrűségfüggvénye? Hány tojó fér bele a talicskába 90%-os valószínűséggel, ha a talicska teherbírása 1 mázsa?
- Egy augusztusi napon a csillaghullások száma Poisson eloszlású. Naponta átlagosan 10 csillagot látunk. Mennyi a valószínűsége, hogy egymást követő 2 napon együttesen több, mint 25 csillaghullás lesz? Ha két napon együttesen volt 15 csillaghullás, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az első napon 3 db volt?
- Los Angelesben az éves eső normális eloszlású, várható értéke 30 cm, szórása 8 cm. Mi a valószínűsége, hogy 2 egymást követő év együttes esőzése meghaladja a 63 cm-t? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő év esőzése több, mint 8 cm-rel meghaladja az ideit? (különböző évek esőzései függetlenek egymástól.)
- Ha $X \sim \text{Geom}(p)$, akkor mi az alábbi változók súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?
 - $Y = 3X - 2$
 - $Z = e^X$
- Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y = X^2$ Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét.
- Legyen $X \sim \text{Uni}(0, 1)$. Adjuk meg az alábbi valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

(a) $Y = \sqrt{2X}$

(b) $V = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$

(c) $Z = \arctan(X)$
- Legyen X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mi lesz $X^2 + Y^2$ eloszlása?