

9. Gyakorlat

Többváltozós folytonos eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény

Definíció (Együttes eloszlásfüggvény) Ugyanazon az eseménytéren definiált X és Y valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, ahol

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Együttes sűrűségfüggvény

Definíció (Együttes sűrűségfüggvény) Ugyanazon az eseménytéren definiált X és Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, amennyiben

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du.$$

Megjegyzés f pontosan akkor együttes sűrűségfüggvény, ha $f \geq 0$ és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$.

Állítás Amennyiben X és Y együttesen folytonos, akkor

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

Továbbá minden $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (mérhető) halmaz esetén

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{X,Y}(x, y) dy dx.$$

Függetlenség

Állítás Az X és Y valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Illetve amennyiben együttesen folytonosak, akkor pontosan akkor, ha

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Perem- és feltételes sűrűségfüggvény

Állítás Az X és Y valószínűségi változók perem-sűrűségfüggvénye (vagyis X és Y sűrűségfüggvénye)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Állítás Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye feltéve az eseményt, hogy $Y = y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye feltéve az eseményt, hogy $X = x$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Feladatok

1. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Mennyi c ? (b) Mennyi $\mathbb{P}(X + Y < 1)$? (c) Mennyi $\mathbb{P}(X^2 < Y)$?
(d) Adjuk meg X perem-sűrűségfüggvényét. (e) Mennyi $\mathbb{E}(X)$? (f) Független-e X és Y ?
2. Legyenek $X \sim \text{Uni}(0, 3)$ és $Y \sim \text{Uni}(-1, 4)$ függetlenek. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.

- (a) $\mathbb{P}(X < Y)$ (b) $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ (c) $\mathbb{P}(XY < 1)$ (d) $\mathbb{P}(X = Y)$

3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (a) Mennyi c ?
(b) Mennyi $\mathbb{P}(Y - X \leq 2)$?
(c) Független-e X és Y ?
(d) Adjuk meg X és Y feltételes sűrűségfüggvényét.
4. Legyen X, Y egyenletes eloszlású azon a négyszögon, melynek csúcsai: $(1, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 2)$.
(a) Mi lesz az együttes eloszlás?
(b) Mik a peremsűrűségek?
(c) Mik a feltételes sűrűségek?
(d) Mik a várható értékek?
5. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Tudjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett Y eloszlása $\text{Exp}(x)$. Mi lesz X és Y együttes sűrűségfüggvénye?
6. Az X és Y együttesen folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye minden $0 < x < 1$ és $|y| < 1$ esetén

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{xy^3 + x}{2}.$$

Tudjuk, továbbá, hogy X értékkészlete $[0, 1]$ és Y értékkészlete $[-1, 1]$. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy (X, Y) a $(0, 0)$, $(0.5, 0)$ és $(0.5, -0.25)$ pontok által meghatározott háromszögbe esik.

7. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az x -tengely és az $y = \sin(x)$ szinuszgörbe által a $(0, 0)$ és a $(\pi, 0)$ pontok között határolt területen.
(a) Határozzuk meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét.
(b) Határozzuk meg X perem-sűrűségfüggvényét.