

9. Gyakorlat

Többváltozós folytonos eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény

Definíció (Együttes eloszlásfüggvény) Ugyanazon az eseménytéren definiált X és Y valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, ahol

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Együttes sűrűségfüggvény

Definíció (Együttes sűrűségfüggvény) Ugyanazon az eseménytéren definiált X és Y valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, amennyiben

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du.$$

Megjegyzés f pontosan akkor együttes sűrűségfüggvény, ha $f \geq 0$ és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$.

Állítás Amennyiben X és Y együttesen folytonos, akkor

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

Továbbá minden $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (mérhető) halmaz esetén

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{X,Y}(x, y) dy dx.$$

Függetlenség

Állítás Az X és Y valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Illetve amennyiben együttesen folytonosak, akkor pontosan akkor, ha

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Perem- és feltételes sűrűségfüggvény

Állítás Az X és Y valószínűségi változók perem-sűrűségfüggvénye (vagyis X és Y sűrűségfüggvénye)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Állítás Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye feltéve az eseményt, hogy $Y = y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye feltéve az eseményt, hogy $X = x$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Feladatok

1. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Mennyi c ? (b) Mennyi $\mathbb{P}(X + Y < 1)$? (c) Mennyi $\mathbb{P}(X^2 < Y)$?
 (d) Adjuk meg X perem-sűrűségfüggvényét. (e) Mennyi $\mathbb{E}(X)$? (f) Független-e X és Y ?

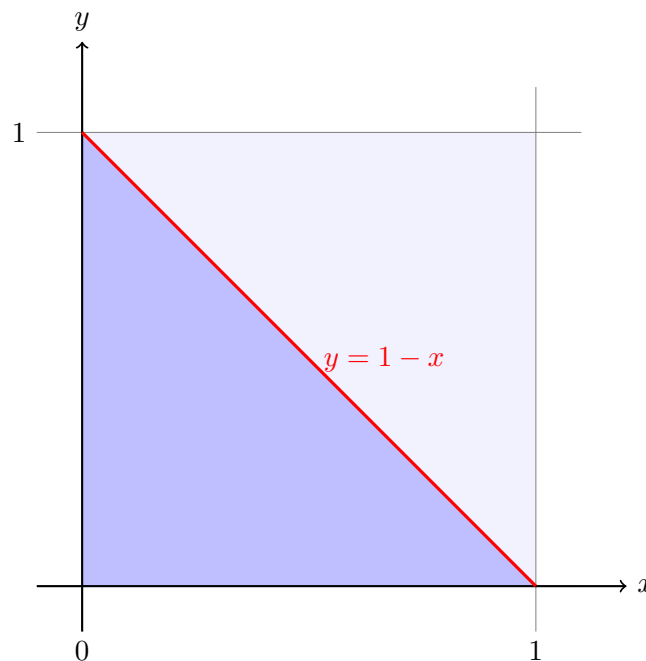
Megoldás

(a) Az alábbiaknak kell teljesülnie

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 c(x^3 + y^3) dy dx \\ &= c \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=1} dx = c \int_0^1 x^3 + \frac{1}{4} dx = c \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} c. \end{aligned}$$

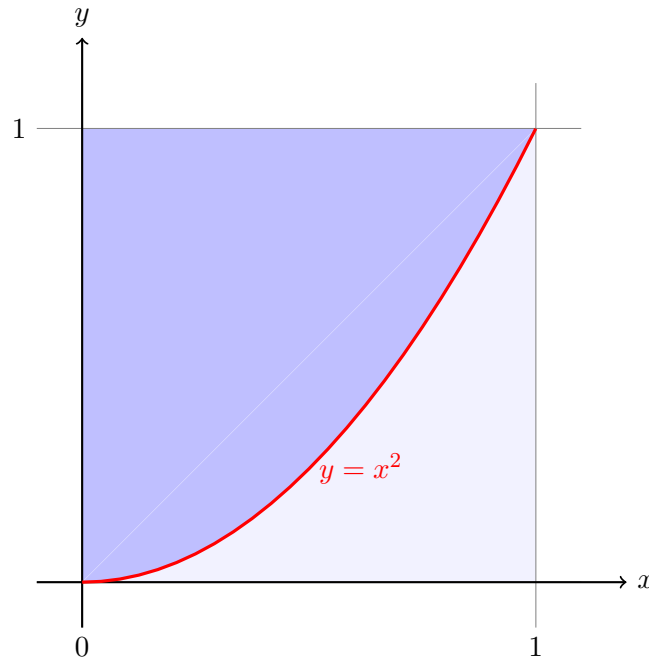
Innen adódik, hogy $c = 2$. Ami jó választás, hiszen a függvény nemnegatív marad.

- (b) Vegyük észre, hogy (X, Y) értékészlete a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzet (kékkel az ábrán), ezért elég ezen meghatározni azon pontokat, amikre $x + y < 1$ teljesül. Ekkor a keresett valószínűség az együttes sűrűségfüggvény megfelelő tartományon (az ábrán sötétebb kékkel) vett integrálja (1. ábra).



1. ábra. A sötétkék részen kell integrálni a $f_{X,Y}$ függvényt ahhoz, hogy megkapjuk a $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ valószínűséget.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x^3 + y^3) dy dx = 2 \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^3 - x^4 + \frac{1}{4} (1-x)^4 dx = 2 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{20} (1-x)^5 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$



2. ábra. A sötétkék részen kell integrálni a $f_{X,Y}$ függvényt ahhoz, hogy megkapjuk a $\mathbb{P}(X^2 < Y)$ valószínűséget.

- (c) A feladat ugyanaz, mint az előző részben, csak most az $x^2 < y$ tartományt kell megkeresni az egységnégyzetben belül (2. ábra).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 < Y) &= \int_0^1 \int_{x^2}^1 2(x^3 + y^3) dy dx = 2 \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^3 + \frac{1}{4} - x^5 - \frac{1}{4} x^8 dx = 2 \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{36} x^9 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{18}.\end{aligned}$$

- (d) X perem-sűrűségfüggvénye mivel $\text{Ran}(X) = (0, 1)$, ezért $x \in (0, 1)$ esetén

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^1 2(x^3 + y^3) dy = \left[2x^3 y + \frac{1}{2} y^4 \right]_{y=0}^{y=1} = 2x^3 + \frac{1}{2},$$

egyébként nulla. Azt kaptuk, hogy

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (e) Mivel ismerjük X perem-sűrűségfüggvényét, így

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(2x^3 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{13}{20}.$$

- (f) Vegyük észre, hogy mivel $f_{X,Y}(x, y)$ szimmetrikus x -re és y -ra, ezért Y perem-sűrűségfüggvénye felhasználva X perem-sűrűségfüggvényét

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y^3 + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ekkor látható, hogy $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, ezért X és Y nem függetlenek.

2. Legyenek $X \sim \text{Uni}(0, 3)$ és $Y \sim \text{Uni}(-1, 4)$ függetlenek. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.

(a) $\mathbb{P}(X < Y)$ (b) $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ (c) $\mathbb{P}(XY < 1)$ (d) $\mathbb{P}(X = Y)$

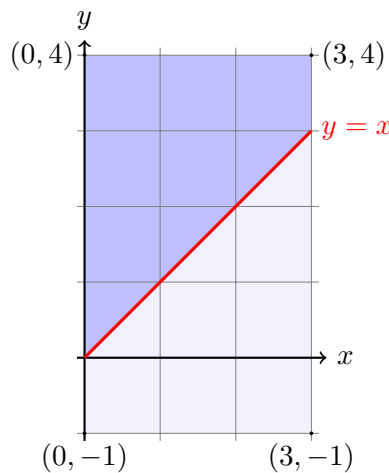
Megoldás Mivel tudjuk, hogy $X \sim \text{Uni}(0, 3)$ és $Y \sim \text{Uni}(-1, 4)$, ezért a sűrűségfüggvényeik

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{ha } -1 < y < 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Továbbá mivel függetlenek, ezért az együttes sűrűségfüggvényük $f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, vagyis

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15} & \text{ha } 0 < x < 3 \text{ és } -1 < y < 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

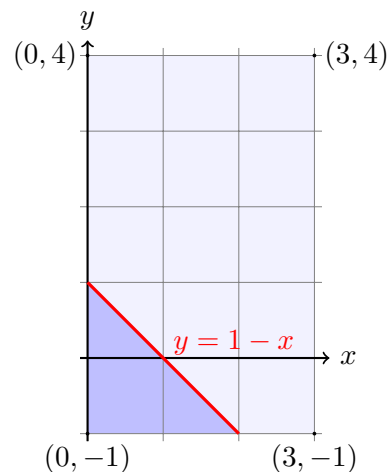
(a) Vegyük észre, hogy a 3. ábra miatt



3. ábra. Az $\mathbb{P}(X < Y)$ valószínűség.

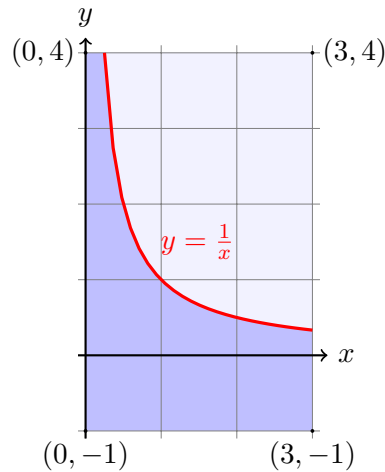
$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^3 \int_x^4 \frac{1}{15} dy dx = \frac{1}{2}.$$

(b) Vegyük észre, hogy a 4. ábra miatt



4. ábra. Az $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ valószínűség.

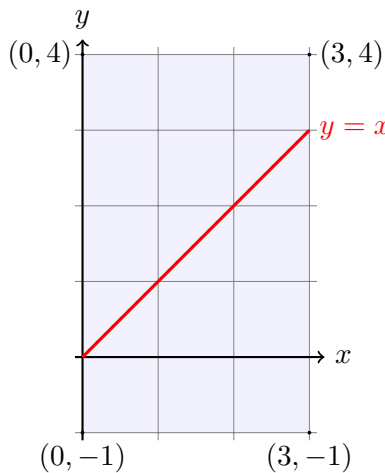
$$\mathbb{P}(X + Y < 1) = \int_0^2 \int_{-1}^{1-x} \frac{1}{15} dy dx = \frac{2}{15}.$$

5. ábra. Az $\mathbb{P}(XY < 1)$ valószínűség.

(c) Vegyük észre, hogy a 5. ábra miatt

$$\mathbb{P}(XY < 1) = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{-1}^4 \frac{1}{15} dy dx + \int_{\frac{1}{4}}^3 \int_{-1}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{15} dy dx = \frac{4}{15} + \frac{\ln(15)}{15} \approx 0.4323.$$

(d) Vegyük észre, hogy a 6. ábra miatt a sűrűséget egy nulla mértékű (területű) halmazon (az $y = x$ egyenesen) kell integrálni, így nulla lesz.

6. ábra. Az $\mathbb{P}(X = Y)$ valószínűség.

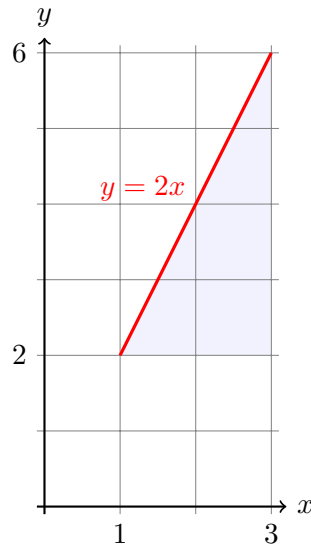
$$\mathbb{P}(X = Y) = 0.$$

3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 2 < y < 2x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (a) Mennyi c ?
- (b) Mennyi $\mathbb{P}(Y - X \leq 2)$?
- (c) Független-e X és Y ?
- (d) Adjuk meg X és Y feltételes sűrűségfüggvényét.

Megoldás

7. ábra. Az (X, Y) értékkészlete.

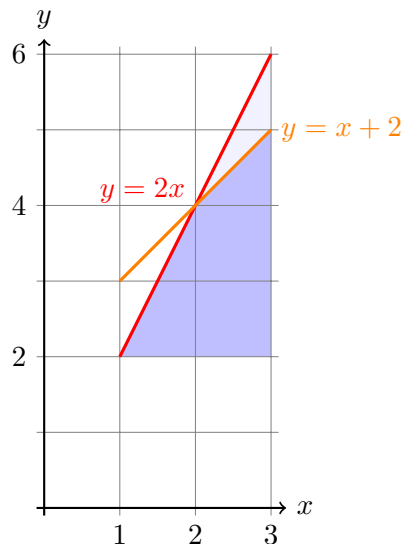
(a) Mivel teljesülnie kell (7. ábra), hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_1^3 \int_2^{2x} c dy dx = c \int_1^3 2x - 2 dx = c \left[x^2 - 2x \right]_{x=1}^{x=3} = 4c,$$

amiből $c = \frac{1}{4}$. Továbbá ez jó is, hiszen a függvény nemnegatív marad.

Másképpen Mivel az együttes sűrűség konstans, ezért az integrál a kék tartományon (7. ábra) a konstansszor a terület, vagyis $c \cdot (2 \cdot 4)/2 = 4c$.

(b) Vegyük észre, hogy (8. ábra)

8. ábra. Az $\mathbb{P}(Y - X \leq 2)$ valószínűséghez a sötétkék tartományon kell integrálni a sűrűséget.

$$\mathbb{P}(Y - X \leq 2) = \int_1^2 \int_2^{2x} \frac{1}{4} dx + \int_2^3 \int_2^{2+x} \frac{1}{4} dx = \frac{7}{8}$$

Másképpen Mivel az együttes sűrűség konstans, ezért elég a 8. ábrán a sötétkék területet kiszámolni és beszorozni a konstans értékével. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y - X \leq 2) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 \cdot 2}{2} + 1 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 1}{2} \right) = \frac{7}{8}.$$

- (c) Nem lesznek függetlenek. Kiszámíthatjuk a perem-sűrűségeket, és ellenőrizhetjük, hogy $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Azonban egyszerűbb észrevenni, hogy amennyiben függetlenek, akkor (X,Y) érték-készlete egy négyzetre kell hogy essen, azonban az érték-készlet ebben az esetben nyilvánvalóan nem egy négyzet.
- (d) Használjuk a 7. ábrát. Ekkor $\text{Ran}(X) = (1, 3)$ és $\text{Ran}(Y) = (2, 6)$. Ekkor a perem-sűrűségek, ahol nem nulla az értékük

$$f_X(x) = \int_2^{2x} \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \int_{\frac{1}{2}y}^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}y.$$

Azt kaptuk, hogy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{ha } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{1}{8}y & \text{ha } 2 < y < 6 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ekkor a feltételes-sűrűségfüggvények, ahol értelmesek és nem nullák

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}y} = \frac{2}{6-y} \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2x-2}.$$

Azt kaptuk, hogy fix $2 < y < 6$ esetén

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2}{6-y} & \text{ha } \frac{1}{2}y < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases},$$

illetve fix $1 < x < 3$ esetén

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-2} & \text{ha } 2 < y < 2x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

4. Legyen X, Y egyenletes eloszlású azon a négyszögon, melynek csúcsai: $(1, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 2)$.

- (a) Mi lesz az együttes eloszlás?
 (b) Mik a peremsűrűségek?
 (c) Mik a feltételes sűrűségek?
 (d) Mik a várható értékek?

Megoldás

- (a) Vegyük észre, hogy a négyszög (9. ábra) területe $2 \cdot 1 = 2$, így mivel az eloszlás egyenletes a négyzeten, a négyzeten konstansnak kell lennie, azon kívül pedig nullának. Ekkor mivel a négyzeten vett integrálnak egynek kell lennie és a területe 2 egyből adódik, hogy

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (b) Mivel $\text{Ran}(X) = (1, 3)$, ezért $x \in (1, 3)$ esetén

$$f_X(x) = \int_1^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2},$$

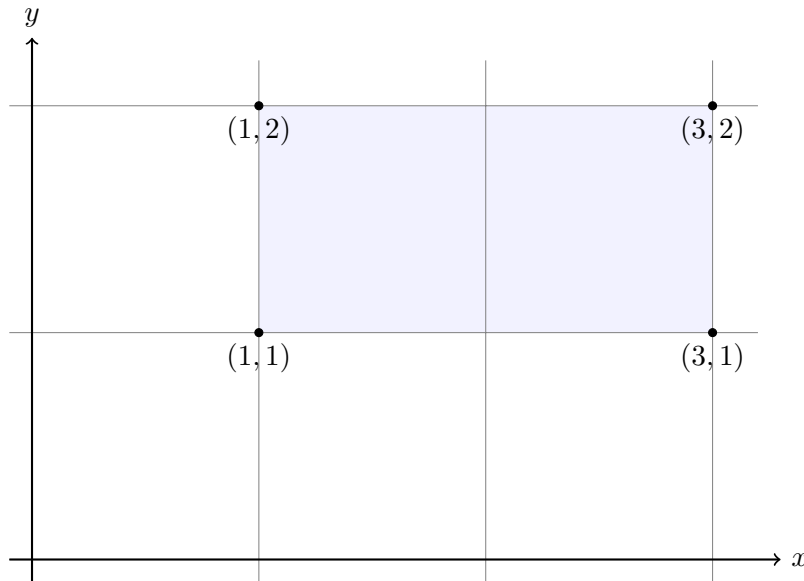
egyébként nulla. Ezért X perem-sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Teljesen hasonló módon Y perem-sűrűségfüggvénye

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Innen az is látható, hogy $X \sim \text{Uni}(1, 3)$ és $Y \sim \text{Uni}(1, 2)$ függetlenek.

9. ábra. Az (X, Y) pár értékkészlete.

- (c) Kihashználhatjuk, hogy mivel X és Y független $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, ezért a feltételes sűrűségfüggvények (fix $1 < x < 3$ és $1 < y < 2$ esetén)

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (d) Használjuk ki, hogy $X \sim \text{Uni}(1, 3)$ és $Y \sim \text{Uni}(1, 2)$, ezért

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

5. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Tudjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett Y eloszlása $\text{Exp}(x)$. Mi lesz X és Y együttes sűrűségfüggvénye?

Megoldás A feladat szövege szerint ismerjük az alábbiakat

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x e^{-xy} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Másfelől tudjuk, hogy $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$, ezért

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda x \cdot e^{-x(\lambda+y)} & \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

6. Az X és Y együttesen folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye minden $0 < x < 1$ és $|y| < 1$ esetén

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{xy^3 + x}{2}.$$

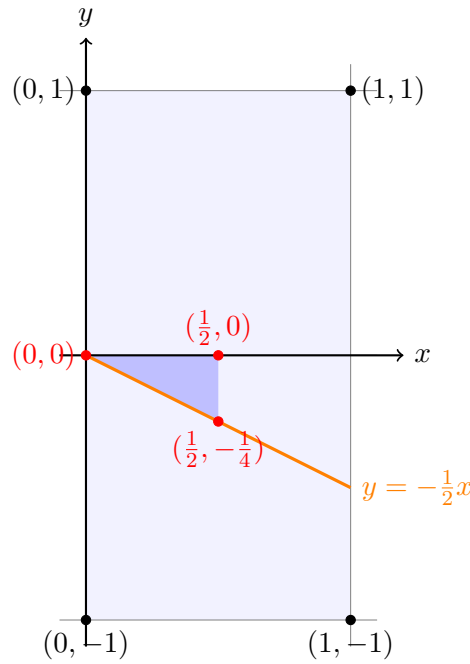
Tudjuk, továbbá, hogy X értékkészlete $[0, 1]$ és Y értékkészlete $[-1, 1]$. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy (X, Y) a $(0, 0)$, $(0.5, 0)$ és $(0.5, -0.25)$ pontok által meghatározott háromszögbe esik.

Megoldás Mivel folytonosak, ezért az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2} y^2.$$

Figyelembe véve az értékkészletet azt kapjuk, hogy

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2} y^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

10. ábra. Az $\mathbb{P}((X, Y) \in \triangle)$ valószínűség.

Ekkor a keresett valószínűség használva a 10. ábrát

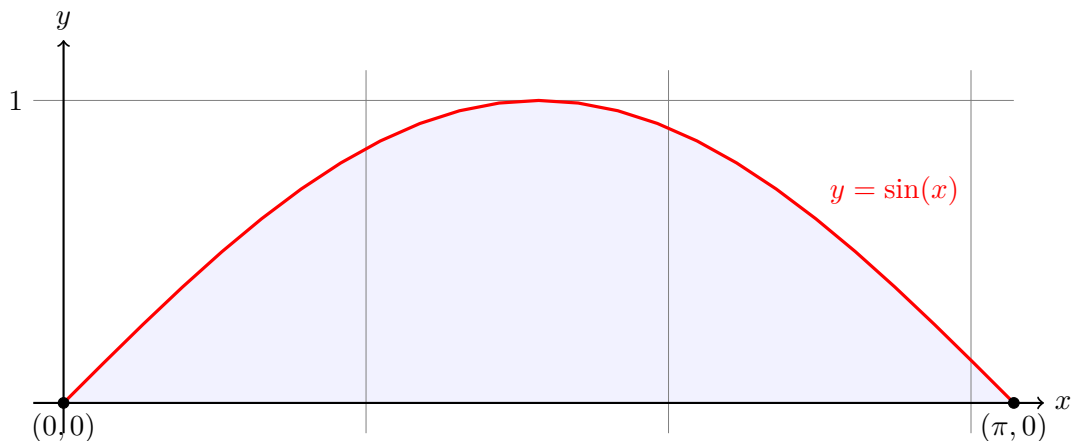
$$\mathbb{P}((X, Y) \in \triangle) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}x}^0 \frac{3}{2} y^2 dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} y^3 \right]_{y=-\frac{1}{2}x}^{y=0} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} x^3 dx = \left[\frac{1}{64} x^4 \right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1024}.$$

7. Az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású az x -tengely és az $y = \sin(x)$ szinuszgörbe által a $(0, 0)$ és a $(\pi, 0)$ pontok között határolt területen.

- Határozzuk meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét.
- Határozzuk meg X perem-sűrűségfüggvényét.

Megoldás

- Mivel X, Y egyenletes egy tartományon (11. ábra), aminek a területe

11. ábra. A tartomány, ahol (X, Y) egyenletes.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} 1 dy dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2,$$

ezért az együttes sűrűségfüggvény a tartományon kívül nulla, a tartományon pedig a terület reciproka. Azt kaptuk, hogy

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \text{ és } 0 \leq y \leq \sin(x) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

(b) Vegyük észre, hogy $\text{Ran}(X) = [0, \pi]$, ezért $x \in [0, \pi]$ esetén

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sin(x),$$

ezen kívül pedig nulla. Vagyis X perem-sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$