

10. Gyakorlat

Kovariancia, korreláció, feltételes várható érték és feltételes variancia

Kovariancia és korreláció

Definíció (Kovariancia) Az X és Y valószínűségi változók kovarianciája

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Állítás Amennyiben X és Y független valószínűségi változók, akkor $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Állítás Teljesülnek az alábbiak.

1. $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
2. $\mathbf{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a \cdot \mathbf{Cov}(X_1, Y) + b \cdot \mathbf{Cov}(X_2, Y)$
3. $\mathbf{Cov}(X, aY_1 + bY_2 + c) = a \cdot \mathbf{Cov}(X, Y_1) + b \cdot \mathbf{Cov}(X, Y_2)$
4. $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbb{D}^2(X)$

Következmény Teljesülnek az alábbiak.

1.

$$\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{Cov}(X_i, Y_j).$$

2. Amennyiben $X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek, akkor

$$\mathbb{D}^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) + \dots + \mathbb{D}^2(X_n).$$

Definíció (Korreláció) Az X és Y valószínűségi változók korrelációja

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)} \in [-1, 1].$$

Megjegyzés A korreláció a lineáris összefüggőség mérőszáma. Mivel közelebb van $|\mathbf{Corr}(X, Y)|$ az 1-hez, annál erősebb a lineáris kapcsolat X és Y között. Amennyiben nulla, akkor a két változó lineárisan független (vagy másképpen korrelálatlan). Amennyiben -1 vagy 1 , akkor a két változó között determinisztikus lineáris kapcsolat van (vagyis $Y = aX + b$, ahol $a \neq 0$ előjele a korreláció előjelétől függ).

Feltételes várható érték és variancia

Definíció (Feltételes várható érték) Legyenek X és Y együttesen definiált valószínűségi változók. Ekkor X várható értéke az $Y = y$ feltétel mellett

$$\mathbb{E}(X|Y = y).$$

Megjegyzés Amennyiben X és Y együttesen folytonos, akkor

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Definíció (Feltételes variancia) Legyenek X és Y együttesen definiált valószínűségi változók. Ekkor X varianciája az $Y = y$ feltétel mellett

$$\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \mathbb{E}(X^2|Y = y) - \mathbb{E}(X|Y = y)^2.$$

Feladatok

- Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros eredmények számát.
 - Adjuk meg X és Y kovarianciáját.
 - Adjuk meg X és Y korrelációját.
- Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{E}(X^3) = 14$. Számítsuk ki $\mathbf{Cov}(X, X^2 - 4X + 4)$ -et. Független-e $X - 2$ és $(X - 2)^2$?
- Legyen X és Y olyan valószínűségi változók, amikre $\mathbb{D}^2(X) = 4$, $\mathbb{D}^2(Y) = 9$, továbbá $\mathbf{Cov}(X, Y) = -3$. Adjuk meg az alábbiakat.
 - $\mathbf{Corr}(X, Y)$
 - $\mathbf{Cov}(2X - Y, 3Y - 2X)$
 - $\mathbb{D}^2(5X - 2Y)$
- Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye az alábbi.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(X, Y)$ értékét.
 - Határozzuk meg $\mathbf{Corr}(X, Y)$ értékét.
 - Mennyi $\mathbb{E}(X|Y = y)$?
 - Mennyi $\mathbb{D}^2(X|Y = y)$?
5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye az alábbi.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } x < y < \frac{1}{x} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Határozzuk meg a perem-sűrűségeket.
- Határozzuk meg X és Y várható értékét és szórását.
- Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(X, Y)$ értékét.
- Határozzuk meg $\mathbf{Corr}(X, Y)$ értékét.
- Független-e X és Y ?
- Határozzuk meg X és Y feltételes sűrűségfüggvényét.
- Határozzuk meg a feltételes várható értékeket.
- Határozzuk meg a feltételes varianciákat.