

10. Gyakorlat

Kovariancia, korreláció, feltételes várható érték és feltételes variancia

Kovariancia és korreláció

Definíció (Kovariancia) Az X és Y valószínűségi változók kovarianciája

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Állítás Amennyiben X és Y független valószínűségi változók, akkor $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Állítás Teljesülnek az alábbiak.

1. $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
2. $\mathbf{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a \cdot \mathbf{Cov}(X_1, Y) + b \cdot \mathbf{Cov}(X_2, Y)$
3. $\mathbf{Cov}(X, aY_1 + bY_2 + c) = a \cdot \mathbf{Cov}(X, Y_1) + b \cdot \mathbf{Cov}(X, Y_2)$
4. $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbb{D}^2(X)$

Következmény Teljesülnek az alábbiak.

1.

$$\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{Cov}(X_i, Y_j).$$

2. Amennyiben $X_1, X_2, \dots, X_n$ függetlenek, akkor

$$\mathbb{D}^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) + \dots + \mathbb{D}^2(X_n).$$

Definíció (Korreláció) Az X és Y valószínűségi változók korrelációja

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y)} \in [-1, 1].$$

Megjegyzés A korreláció a lineáris összefüggőség mérőszáma. Mivel közelebb van $|\mathbf{Corr}(X, Y)|$ az 1-hez, annál erősebb a lineáris kapcsolat X és Y között. Amennyiben nulla, akkor a két változó lineárisan független (vagy másképpen korrelálatlan). Amennyiben -1 vagy 1 , akkor a két változó között determinisztikus lineáris kapcsolat van (vagyis $Y = aX + b$, ahol $a \neq 0$ előjele a korreláció előjelétől függ).

Feltételes várható érték és variancia

Definíció (Feltételes várható érték) Legyenek X és Y együttesen definiált valószínűségi változók. Ekkor X várható értéke az $Y = y$ feltétel mellett

$$\mathbb{E}(X|Y = y).$$

Megjegyzés Amennyiben X és Y együttesen folytonos, akkor

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx.$$

Definíció (Feltételes variancia) Legyenek X és Y együttesen definiált valószínűségi változók. Ekkor X varianciája az $Y = y$ feltétel mellett

$$\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \mathbb{E}(X^2|Y = y) - \mathbb{E}(X|Y = y)^2.$$

Feladatok

1. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros eredmények számát.
- Adjuk meg X és Y kovarianciáját.
 - Adjuk meg X és Y korrelációját.

Megoldás Korábban már kiszámoltuk az együttes eloszlást (4. feladatsor 7-es feladat). Ekkor az együttes eloszlástáblázat a peremeloszlásokkal együtt.

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_Y(\cdot)$
0	$\frac{9}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
$p_X(\cdot)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

- (a) A kovariancia

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A szorzat várható értékét már kiszámítottuk (4. feladatsor 7-es feladat), ami

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2}.$$

A két várható érték továbbá

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot \frac{9}{36} + 1 \cdot \frac{18}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} = \frac{36}{36} = 1.\end{aligned}$$

Ekkor a kovariancia

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

- (b) A korreláció

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}.$$

A két második momentum

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{25}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}, \\ \mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot \frac{9}{36} + 1^2 \cdot \frac{18}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

A két szórás ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \sqrt{\frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6} \\ \mathbb{D}(Y) &= \sqrt{\frac{3}{2} - 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

A korreláció innen

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{10}}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.4472.$$

X és Y között tehát egy gyengébb pozitív lineáris kapcsolat van.

2. Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{E}(X^3) = 14$. Számítsuk ki $\mathbf{Cov}(X, X^2 - 4X + 4)$ -et. Független-e $X - 2$ és $(X - 2)^2$?

Megoldás Használjuk ki a kovariancia definícióját és a várható érték linearitását.

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, X^2 - 4X + 4) &= \mathbb{E}(X(X^2 - 4X + 4)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2 - 4X + 4) \\ &= \mathbb{E}(X^3 - 4X^2 + 4X) - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X^2) - 4\mathbb{E}(X) + 4) \\ &= \mathbb{E}(X^3) - 4\mathbb{E}(X^2) + 4\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X^2) - 4\mathbb{E}(X) + 4) \\ &= 14 - 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot (5 - 4 \cdot 2 + 4) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$(X - 2)$ és $(X - 2)^2$ függetlenségéhez vizsgáljuk meg a kovarianciájukat

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X - 2, (X - 2)^2) &= \mathbf{Cov}(X - 2, X^2 - 2X + 4) = \mathbf{Cov}(X, X^2 - 2X) \\ &= \mathbb{E}(X(X^2 - 2X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2 - 2X) = \mathbb{E}(X^3) - 2\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X^2) - 2) \\ &= 14 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot (4 - 2) = 0.\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a kovariancia nulla. Azonban ebből nem következik, hogy függetlenek is. Ezért további vizsgálat szükséges. Amennyiben $(X - 2)^2$ konstans, akkor nyilvánvalóan független $X - 2$ -től. Amennyiben $(X - 2)^2$ nem konstans, akkor nem lehet független $X - 2$ -től. Ehhez tegyük fel, hogy ekkor függetlenek lennének. Ekkor nyilván $|X - 2|$ és $\sqrt{(X - 2)^2}$ is függetlenek, amiből a függetlenséget és azt, hogy $|X - 2| = \sqrt{(X - 2)^2}$ használva minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - 2| \leq t) &= \mathbb{P}(|X - 2| \leq t, \sqrt{(X - 2)^2} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(|X - 2| \leq t) \mathbb{P}(\sqrt{(X - 2)^2} \leq t) = \mathbb{P}(|X - 2| \leq t)^2.\end{aligned}$$

Vagyis $|X - 2|$ eloszlásfüggvénye csak a 0 és 1 értékeket veszi fel. Vagyis $|X - 2|$ konstans. De ekkor $(X - 2)^2$ is konstans, ami ellentmondás. Így ebben az esetben $X - 2$ és $(X - 2)^2$ biztosan nem függetlenek, annak ellenére, hogy a kovarianciájuk nulla.

3. Legyen X és Y olyan valószínűségi változók, amikre $\mathbb{D}^2(X) = 4$, $\mathbb{D}^2(Y) = 9$, továbbá $\mathbf{Cov}(X, Y) = -3$. Adjuk meg az alábbiakat.

- $\mathbf{Corr}(X, Y)$
- $\mathbf{Cov}(2X - Y, 3Y - 2X)$
- $\mathbb{D}^2(5X - 2Y)$

Megoldás

- (a) A korreláció definíciója alapján

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)} = \frac{-3}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{4}.$$

- (b) A kovariancia azonosságait használva

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(2X - Y, 3Y - 2X) &= 6\mathbf{Cov}(X, Y) - 4\mathbb{D}^2(X) - 3\mathbb{D}^2(Y, Y) + 2\mathbf{Cov}(Y, X) \\ &= 6 \cdot (-3) - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) \\ &= -67.\end{aligned}$$

- (c) Ugyancsak a kovariancia azonosságait használva

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(5X - 2Y) &= \mathbf{Cov}(5X - 2Y, 5X - 2Y) \\ &= 25\mathbb{D}^2(X) - 20\mathbf{Cov}(X, Y) + 4\mathbb{D}^2(Y) \\ &= 25 \cdot 4 - 20 \cdot (-3) + 4 \cdot 9 \\ &= 196.\end{aligned}$$

4. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye az alábbi.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(X, Y)$ értékét.
- (b) Határozzuk meg $\mathbf{Corr}(X, Y)$ értékét.
- (c) Mennyi $\mathbb{E}(X|Y = y)$?
- (d) Mennyi $\mathbb{D}^2(X|Y = y)$?

Megoldás Korábban már kiszámoltuk a perem-sűrűségfüggvényeket (9. feladatsor 1-es feladat). Ekkor

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y^3 + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

- (a) A kovariancia

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Korábban már kiszámoltuk X várható értékét. Mivel X és Y eloszlása ugyanaz (a sűrűségfüggvényeik megegyeznek), így Y -nak is ez a várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{13}{20}.$$

A szorzat várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 2(x^3 + y^3) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x^4 y^2 + \frac{2}{5} xy^5 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 x^4 + \frac{2}{5} x dx = \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{5} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Innen a kovariancia

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{2}{5} - \frac{13}{20} \cdot \frac{13}{20} = -\frac{9}{400}.$$

- (b) A korreláció

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X), \mathbb{D}(Y)}.$$

Az X második momentuma

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \left(2x^3 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^6 + \frac{1}{6} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2},$$

amiből a szórás

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{13}{20} \right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{20}.$$

Mivel Y eloszlása megegyezik X eloszlásával, így

$$\mathbb{D}(Y) = \mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{31}}{20}.$$

A korreláció ekkor

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \frac{-\frac{9}{400}}{\frac{\sqrt{31}}{20} \cdot \frac{\sqrt{31}}{20}} = -\frac{9}{31} \approx -0.2903.$$

X és Y között egy gyenge negatív lineáris kapcsolat van.

(c) Határozzuk meg X feltételes sűrűségfüggvényét az $Y = y$ feltétel mellett, ahol $0 < y < 1$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2(x^3+y^3)}{2y^3+\frac{1}{2}} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ekkor a feltételes várható érték fix $0 < y < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2(x^3+y^3)}{2y^3+\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2y^3+\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{5}x^5 + x^2y^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\frac{2}{5} + y^3}{2y^3+\frac{1}{2}} = \frac{10y^3+4}{20y^3+5}. \end{aligned}$$

(d) Az X feltételes második momentuma fix $0 < y < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2(x^3+y^3)}{2y^3+\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2y^3+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^3y^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}y^3}{2y^3+\frac{1}{2}} = \frac{4y^3+2}{12y^3+3}. \end{aligned}$$

Ekkor a feltételes szórásnégyzet fix $0 < y < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(X|Y=y) &= \mathbb{E}(X^2|Y=y) - \mathbb{E}(X|Y=y)^2 \\ &= \frac{4y^3+2}{12y^3+3} - \left(\frac{10y^3+4}{20y^3+5} \right)^2 = \frac{2}{75} \cdot \frac{50y^6+30y^3+1}{(4y^3+1)^2}. \end{aligned}$$

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye az alábbi.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } x < y < \frac{1}{x} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Határozzuk meg a perem-sűrűségeket.
- Határozzuk meg X és Y várható értékét és szórását.
- Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(X, Y)$ értékét.
- Határozzuk meg $\mathbf{Corr}(X, Y)$ értékét.
- Független-e X és Y ?
- Határozzuk meg X és Y feltételes sűrűségfüggvényét.
- Határozzuk meg a feltételes várható értékeket.
- Határozzuk meg a feltételes varianciákat.

Megoldás

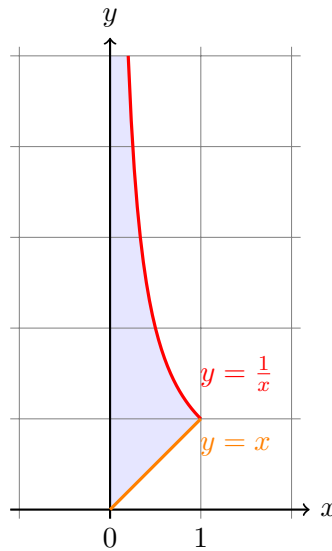
(a) Vegyük észre, hogy $\text{Ran}(X) = (0, 1)$ és $\text{Ran}(Y) = (0, \infty)$ (1. ábra).

Ekkor $0 < x < 1$ esetén

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2y} dy = \left[\frac{1}{2} \ln(y) \right]_{y=x}^{y=\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}{2} = -\ln(x).$$

Azt kaptuk, hogy az X perem-sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

1. ábra. Az (X, Y) értékészlete.

Továbbá $0 < y \leq 1$ esetén

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2},$$

illetve $1 < y$ esetén

$$f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2y^2}.$$

Azt kaptuk, hogy Y perem-sűrűségfüggvénye

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{2y^2} & \text{ha } 1 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

(b) Az X várható értéke parciális integrálással

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot (-\ln(x)) dx = \underbrace{\left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right]_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Az Y várható értéke

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2} dy + \int_1^{\infty} y \cdot \frac{1}{2y^2} dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty.$$

Ekkor $\mathbb{E}(Y) = \infty$ értelmes, mivel $\text{Ran}(Y) = (0, \infty)$.

Ekkor az X második momentuma parciális integrálással

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot (-\ln(x)) dx = \underbrace{\left[-\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x) \right]_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{3} x^2 dx = \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{9}.$$

Innen X varianciája és szórása

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{7}{144} \quad \text{és} \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{7}{144}} = \frac{\sqrt{7}}{12}.$$

Mivel $\mathbb{E}(Y) = \infty$, ezért $\mathbb{D}^2(Y)$ nem létezik.

(c) Mivel $\mathbb{E}(Y) = \infty$, ezért $\mathbf{Cov}(X, Y)$ nem létezik. A szorzat várható értéke ennek ellenére létezik

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_x^{\frac{1}{x}} xy \cdot \frac{1}{2y} dy dx = \int_0^1 \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} x dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

(d) Mivel $\mathbf{Cov}(X, Y)$ nem létezik, ezért $\mathbf{Corr}(X, Y)$ sem létezik.

(e) Vegyük észre, hogy

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln(x) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y \leq 1 \\ -\frac{1}{2y^2} \ln(x) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 1 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases},$$

ezért $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, vagyis X és Y nem független. Onnan is látható, hogy (X, Y) értékészlete nem egy téglalap.

(f) Az X feltételes sűrűségfüggvénye, amennyiben $0 < y \leq 1$, akkor

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2y}}{\frac{1}{2}} & \text{ha } 0 < x < y \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Továbbá amennyiben $1 < y$, akkor

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2y}}{\frac{1}{2y^2}} & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{y} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

i. Ha $0 < y \leq 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{ha } 0 < x < y \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Vagyis ekkor $X|Y = y \sim \text{Uni}(0, y)$

ii. Ha $1 < y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} y & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{y} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Vagyis ekkor $X|Y = y \sim \text{Uni}(0, y^{-1})$

Az Y feltételes sűrűségfüggvénye, amennyiben $0 < x < 1$, akkor

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} -\frac{1}{2y \ln(x)} & \text{ha } x < y < \frac{1}{x} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

(g) Az X feltételes várható értéke

i. Ha $0 < y \leq 1$

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} dx = \left[\frac{1}{2y} x^2 \right]_{x=0}^{x=y} = \frac{1}{2} y = \mathbb{E}(\text{Uni}(0, y)).$$

ii. Ha $1 < y$

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^{\frac{1}{y}} x \cdot y dx = \left[\frac{1}{2} y x^2 \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{y}} = \frac{1}{2y} = \mathbb{E}(\text{Uni}(0, y^{-1})).$$

Azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y & \text{ha } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{2y} & \text{ha } 1 < y \end{cases}.$$

Az Y feltételes várható értéke $0 < x < 1$ esetén

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_x^{\frac{1}{x}} y \cdot -\frac{1}{2y \ln(x)} dy = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2 \ln(x)} dy = \frac{x - \frac{1}{x}}{2 \ln(x)} = \frac{x^2 - x}{2x \ln(x)}.$$

(h) Az X feltételes varianciája

i. Ha $0 < y \leq 1$. Mivel ekkor $X|Y = y \sim \text{Uni}(0, y)$, ezért

$$\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \frac{y^2}{12}.$$

ii. Ha $1 < y$. Mivel ekkor $X|Y = y \sim \text{Uni}(0, y^{-1})$, ezért

$$\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \frac{1}{12y^2}.$$

Összefoglalva

$$\mathbb{D}^2(X|Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{12}y & \text{ha } 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{12y^2} & \text{ha } 1 < y \end{cases}.$$

Az Y feltételes második momentuma $0 < x < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2|X = x) &= \int_x^{\frac{1}{x}} y^2 \cdot -\frac{1}{2y \ln(x)} dy = -\int_x^{\frac{1}{x}} y \frac{1}{2 \ln(x)} dy \\ &= -\left[\frac{1}{4} \frac{y^2}{\ln(x)} \right]_{y=x}^{y=\frac{1}{x}} = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{4 \ln(x)} = \frac{x^4 - 1}{4x^2 \ln(x)}. \end{aligned}$$

Amiből Y feltételes varianciája $0 < x < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(X|Y = y) &= \mathbb{E}(X^2|Y = y) - \mathbb{E}(X|Y = y)^2 \\ &= \frac{x^4 - 1}{4x^2 \ln(x)} - \left(\frac{x^2 - x}{2x \ln(x)} \right)^2 = \frac{(x^4 - 1) \ln(x) - (x - 1)^2 x^2}{4x^2 \ln(x)}. \end{aligned}$$