

12. Gyakorlat

Konfidenciaintervallum, hipotézisvizsgálat

Konfidenciaintervallum

Definíció Legyen $\underline{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ f.a.e. minta az X_ϑ háttérváltozóból és $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor a

$$[T_1(\underline{X}_n), T_2(\underline{X}_n)]$$

intervallum a ϑ paraméter $f(\vartheta)$ függvényére $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum, ha teljesül rá, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(f(\vartheta) \in [T_1(\underline{X}_n), T_2(\underline{X}_n)]) = 1 - \varepsilon,$$

vagyis az intervallum $1 - \varepsilon$ valószínűséggel tartalmazza $f(\vartheta)$ -t.

Állítás Legyen $\underline{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ f.a.e. minta $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású változóból és $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor amennyiben

$$\left(-\infty, \bar{X}_n + r_\varepsilon\right], \quad \left[\bar{X}_n - r_{\varepsilon/2}, \bar{X}_n + r_{\varepsilon/2}\right], \quad \left[\bar{X}_n - r_\varepsilon, \infty\right).$$

egy $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a μ paraméterre, akkor

- Ismert σ^2 paraméter esetén

$$r_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_\alpha,$$

ahol $u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, vagyis a standard normális eloszlás $1 - \alpha$ kvantilise.

- NEM ismert σ^2 paraméter esetén

$$r_\alpha = \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \alpha},$$

ahol $t_{n-1, \alpha}$ az $n - 1$ szabadsági fokú Student féle t -eloszlás eloszlás $1 - \alpha$ kvantilise.

Egymintás hipotézisvizsgálat

Legyen adott $\underline{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ f.a.e. minta $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású változóból. Végezzünk a μ paraméterre $0 < \varepsilon < 1$ szignifikancia szintű próbát a következő hipotézisek valamelyikével.

$$H_0 : \mu(\leq | = | \geq) \mu_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu(> | \neq | <) \mu_0$$

A próba típusát az határozza meg, hogy ismerjük-e előzetesen σ^2 értékét.

- u -PRÓBA, ha σ^2 ismert
- t -PRÓBA, ha σ^2 NEM ismert

Ekkor az elfogadási tartomány alakja a következő lesz.

próba	$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu_0 \leq \mu$
u-próba	$(-\infty, u_\varepsilon]$	$[-u_{\frac{\varepsilon}{2}}, u_{\frac{\varepsilon}{2}}]$	$[-u_\varepsilon, \infty)$
t-próba	$(-\infty, t_{n-1, \varepsilon}]$	$[-t_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}}, t_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}}]$	$[-t_{n-1, \varepsilon}, \infty)$

Továbbá a próbafüggvény értéke ekkor (értelem szerűen a megfelelő próba esetén).

$$u = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{vagy} \quad t = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}}$$

Ezután döntünk a nullhipotézisről.

- H_0 -t ELFOGADJUK, ha a próbafüggvény az elfogadási tartományba esik
- H_0 -t ELUTASÍTJUK, ha a próbafüggvény az elfogadási tartományon kívülre esik

A p -érték az a legkisebb szignifikancia szint, ami mellett H_0 -t elutasítjuk.

Feladatok

1. Egy normális eloszlású véletlen változóval generáltuk az alábbi mintát: (5, 6, 7, 4, 5.5, 6, 8, 7, 10).
 - (a) Adjunk X várható értékére 95%-os konfidenciaintervallumot!
 - (b) Hogyan változik az intervallum, ha megtudjuk, hogy az eloszlás szórása 2?
 - (c) Adjuk meg mindkét esetben a 99%-os konfidenciaintervallumot is!
 - (d) Mekkora az az érték, aminél 90%-os valószínűséggel kisebb a várható érték? (A szórásról továbbra is tudjuk, hogy 2.)
2. Texasban a hőmérsékletet Fahrenheit fokokban mérik. Megállapították, hogy az ottani hőmérséklet eloszlása nyaranta $N(\mu, \sigma^2 = 16)$. A következő hőmérsékleteket mérték: (82, 80, 91, 90, 85, 87, 86, 83, 84).
 - (a) Adjunk a fenti minta alapján 90%-os szinthez konfidenciaintervallumot az átlaghőmérsékletre!
 - (b) Ha tudjuk, hogy a várható érték $86F^\circ$, mi lesz az eloszlás, ha áttérünk Celsius skálára? Tudjuk, hogy $\frac{5}{9}(X - 32)[F^\circ] = Y[C^\circ]$.
 - (c) Ha tudjuk, hogy a hőmérséklet több, mint $90F^\circ$, akkor mi a valószínűsége, hogy 85 és $95F^\circ$ között lesz? (A várható érték még mindig $86F^\circ$.)
3. Egy lángossütő törzsvendége szerint az utóbbi időben kisebbek a lángosok, mint régen. A hely tulajdonosa szerint várható értékben 20 dkg-osok a lángosaik. A törzsvendég 10 alkalommal megmérte az itt vásárolt lángosok tömegét, a minta átlagára 18 dkg, korrigált empirikus szórására 1 dkg adódott. Feltételezve, hogy az egyes alkalmakkor mért adatok f.a.e. normális eloszlásúak, konstruáljunk próbát 5%-os szignifikancia szint mellett, amellyel eldönthető, hogy eléri-e a lángosok tömegének várható értéke a 20 dkg-ot!
 - (a) Adjunk meg egy, a szituációnak megfelelő H_0 nullhipotézist és a H_1 ellenhipotézist.
 - (b) A próbastatisztika mely értékei esetén fogadjuk el H_0 -t?
 - (c) Számítsuk ki a próbastatisztikát és döntsük el, hogy H_0 -t elfogadjuk vagy elutasítjuk-e.
 - (d) Mennyi a p -érték?
4. Egy régi lakóház 10 lakásának nagy szobáiban a kézzel készített ablakok hivatalosan 1 méter szélességűek. Az ablakok szélességét megmértük és (méterben mérve) rendre a 0.97, 1.01, 1.00, 0.98, 0.99, 0.95, 1.03, 1.00, 0.99, 0.98 adatokat kaptuk. Vizsgáljuk meg 5% szignifikanciájú próbával, hogy az ablakok szélességét 1 méteresnek tekinthetjük-e, ha feltesszük, hogy az ablakok szélességei f.a.e. normális eloszlású valószínűségi változók
 - (a) 2 cm szórással,
 - (b) ismeretlen szórással!