

1. zh megoldások

1. Tommy Shelby lóversenyre fogad. A rajtoló lovak 1/4-e fekete, 1/3-a pej és 5/12-e szürke. A feketék 2/3-a, a pej lovak 1/4-e és a szürkék 1/5-e tartozik Tommy favoritjai közé. (Feltesszük, hogy minden versenyen ugyanazok a lovak indulnak, a lovak és a versenyek függetlenek egymástól.)

- (a) Ha a lovas listáról random választunk egyet, mi a valószínűsége, hogy egy favorit lesz? Ha választottunkról tudjuk, hogy favorit, akkor mi a valószínűsége, hogy fekete? (3+3p)

Megoldás Legyenek az alábbi események

$$F = \{\text{a ló fekete}\}, \quad P = \{\text{a ló pej}\}, \quad Sz = \{\text{a ló szürke}\}.$$

Ekkor tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(P) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Sz) = \frac{5}{12}.$$

Továbbá legyen

$$Fa = \{\text{a ló Tommy favoritja}\}.$$

Ekkor tudjuk az alábbiakat is

$$\mathbb{P}(Fa | F) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Fa | P) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Fa | Sz) = \frac{1}{5}.$$

Mivel F, P, Sz teljes eseményrendszert alkot, így a TVT szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Fa) &= \mathbb{P}(Fa | F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(Fa | P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(Fa | Sz)\mathbb{P}(Sz) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

Továbbá Bayes-tétele miatt

$$\mathbb{P}(F | Fa) = \frac{\mathbb{P}(Fa | F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(Fa)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Annak a valószínűsége, hogy 5 versenyből kettőt Tommy favoritja nyer megegyezik annak a valószínűségével, hogy 5 versenyből csak egyet nyer. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 5 versenyből 3 favorit nyer. Milyen eloszlásról van szó? (5+1p)

Megoldás Legyen X az 5 versenyből azok száma, amiket Tommy favoritja nyert meg. Ekkor a feladat szövege szerint

$$X \sim \text{Bin}(5, p).$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=1) = \binom{5}{1} p (1-p)^4.$$

Vagyis az alábbi egyenletünk van p -re

$$10p^2(1-p)^3 = 5p(1-p)^4,$$

amit átrendezve

$$2p = 1 - p,$$

vagyis

$$p = \frac{1}{3}.$$

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} \approx 0.1646.$$

- (c) Egyszerre legfeljebb 12 ló indulhat a versenyen és tekintsük őket egyformán esélyesnek. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 helyezett között 2 fekete lesz. Milyen eloszlás ez? (3+2p)

Megoldás Mivel a feladat szerint a 12 lóból 3 fekete, 4 pej és 5 szürke indul, így amennyiben Y az első 3 helyezett között a feketék száma, akkor

$$Y \sim \text{Hypergeom}(12, 3, 3).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220} \approx 0.1227.$$

- (d) Monaghan Boy Tommy egyik favoritja. Mi a valószínűsége, hogy az 5. verseny lesz a 2. amit megnyer? Milyen eloszlás ez? (3+1p)

Megoldás Mivel minden versenyt $1/12$ valószínűséggel nyer meg Monaghan Boy, ezért amennyiben Z a második megnyert verseny sorszáma, akkor

$$Z \sim \text{Negbinom}\left(2, \frac{1}{12}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Z = 5) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{1331}{62208} \approx 0.0214.$$

2. A Shelby családhoz egymás után érkező fegyverszállítmányok között eltelt idő egymástól független exponenciális eloszlású, egy hónap várható értékkel.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy ha ebben a hónapban kaptak már egy szállítmányt, akkor kapnak még egyet (ugyanebben a hónapban)? (4p)

Megoldás Legyen $N(t)$ a $t \geq 0$ hónapig beérkezett fegyverszállítmányok száma. Ekkor $N(t)$ egy Poisson-folyamat $\lambda = 1$ intenzitással. Ekkor az egy hónap alatt érkezett fegyverszállítmányok száma

$$N(1) \sim \text{Poi}(1).$$

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(1) \geq 2 \mid N(1) \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(N(1) \geq 2, N(1) \geq 1)}{\mathbb{P}(N(1) \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(N(1) \geq 2)}{\mathbb{P}(N(1) \geq 1)} = \frac{1 - e^{-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \approx 0.4180.$$

- (b) Mi a valószínűsége, hogy az idei 8. szállítmány már megérkezik október végéig? (3p)

Megoldás Az október végéig megérkezett szállítmányok száma

$$N(10) \sim \text{Poi}(10).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(N(10) \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(N(10) \leq 7) = 1 - \sum_{k=0}^7 e^{-10} \frac{10^k}{k!} \approx 0.7798.$$

- (c) Mi a valószínűsége, hogy a következő szállítmányra még legalább 2 hónapot kell várni, ha már több, mint egy hónapja várnak rá? (3p)

Megoldás Legyen T a két szállítmány között eltelt idő (hónapban). Ekkor a feladat szövege szerint

$$T \sim \text{Exp}(1).$$

Ekkor az örökifjúság miatt a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(T > 1 + 2 \mid T > 1) = \mathbb{P}(T > 2) = 1 - (1 - e^{-1 \cdot 2}) = e^{-2} \approx 0.1353.$$

3. Arthur Shelby felépülése egy bokszmeccs után egyenletes eloszlású 1,5 hét várható értékkel és $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hét szórással. John Shelby felépülése normális eloszlású szintén 1.5 várható értékkel és 0.1 hét szórással.

- (a) Melyikükénél valószínűbb, hogy felépül 2 hét alatt? (7p)

Megoldás Legyen A Arthur és J John felépülési ideje hetekben. Ekkor

$$A \sim \text{Uni}(a, b), \quad J \sim \mathcal{N}(1.5, 0.1^2).$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$1.5 = \mathbb{E}(A) = \frac{a+b}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \mathbb{D}(A) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Innen $a = 0.5$ és $b = 2.5$.

A keresett valószínűségek

$$\mathbb{P}(A \leq 2) = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

$$\mathbb{P}(J \leq 2) = \mathbb{P}\left(\frac{J - 1.5}{0.1} \leq \frac{2 - 1.5}{0.1}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{J - 1.5}{0.1} \leq 5\right) = \Phi(5) \approx 1.$$

Vagyis John nagyobb valószínűséggel épül fel 2 héten belül.

- (b) Mi a valószínűsége, hogy a 4. meccs lesz az első olyan meccse Arthurnak, amiből max 1 hét alatt felépül? (5p)

Megoldás Annak a valószínűsége, hogy egy héten belül felépül

$$\mathbb{P}(A \leq 1) = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Ekkor amennyiben M az első meccs sorszáma, ami után max 1 héten belül felépül, akkor

$$M \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(M = 4) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256} \approx 0.1055.$$

4. Shelby klánnál egy verekedés hosszának a sűrűségfüggvénye $f(x) = c \cdot 2^{-x}$, ha $x > 0$ és 0 egyébként.

- (a) Mennyi c ? (3p)

Megoldás Az kell, hogy

$$1 = \int_0^\infty c \cdot 2^{-x} dx = c \left[-\frac{2^{-x}}{\ln(2)} \right]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = c \cdot \frac{1}{\ln(2)}.$$

amiből

$$c = \ln(2).$$

Ez jó, hiszen ekkor f nemnegatív marad.

Másképpen: Vegyük észre, hogy

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-\ln(2) \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Vagyis $V \sim \text{Exp}(\ln(2))$. Ekkor pedig a normalizáló konstans

$$c = \ln(2).$$

(b) Mennyi a verekedés hosszának a várható értéke. (4p)

Megoldás Amennyiben V a verekedés hossza, akkor parciális integrálás után

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot \ln(2) \cdot 2^{-x} dx = [-x \cdot 2^{-x}]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} + \int_0^\infty 2^{-x} dx = 0 + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1.4427.$$

Másképpen: Mivel $V \sim \text{Exp}(\ln(2))$, ezért

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(c) Mennyi a verekedés hosszának a szórása. (10p)

Megoldás A verekedés hosszának a varianciája

$$\mathbb{D}^2(V) = \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2 = \mathbb{E}(V^2) - \frac{1}{\ln^2(2)}.$$

A második momentum parciális integrálással és felhasználva a korábbi eredményt

$$\mathbb{E}(V^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-x} dx = [-x^2 \cdot 2^{-x}]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} + 2 \int_0^\infty x \cdot 2^{-x} dx = 0 + 2 \cdot \frac{1}{\ln(2)} \mathbb{E}(V) = \frac{2}{\ln^2(2)}.$$

Amiből

$$\mathbb{D}^2(V) = \frac{2}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(2)} = \frac{1}{\ln^2(2)},$$

innen pedig

$$\mathbb{D}(V) = \sqrt{\frac{1}{\ln^2(2)}} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Másképpen: Kihasználva, hogy $V \sim \text{Exp}(\ln(2))$

$$\mathbb{D}(V) = \frac{1}{\ln(2)}.$$