

A4 gyakorló feladatok

- Eseményalgebra, kombinatorika** Feldobunk két dobókockát. Legyenek A és B események, ahol A azon kimenetek halmaza, amelyeknél a dobott számok összege kétjegyű, B pedig amelyeknél a dobott számok összege páros. Tudván, hogy A és B események, az alábbiak események-e? (Azaz benne vannak-e az A és B által generált szigma-algebrában?) C = dobott számok összege egész, D = dobott számok összege irracionális, E = dobott számok összege 11, F = dobott számok összege 7.
- Legalább hányszor kell feldobnunk egy szabályos dobókockát, hogy legalább 90%-os valószínűséggel legyen közte legalább egy 5-ös dobás?
- Ha minden héten ugyanazokkal a számokkal lottózom, akkor legalább hány hétig kell játszanom, hogy legalább $1/2$ valószínűséggel legyen 3-as találatom?
- Az USA-ban nagyon divatos a *gender reveal party*, azaz amikor a szülők bejelentik a születendő baba nemét. Ez pedig úgy történik, hogy van 15 doboz, amik közül 7-ben kék és 8-ban rózsaszín szalag van, ha a baba lány és fordított az arány, ha fiú. A résztvevők elkezdik kinyitni a dobozokat, és akkor derül ki a gyerek neme, amikor megvan 8 egyforma színű szalag. Mi a valószínűsége, hogy mind a 15 dobozt ki kell nyitni? Mi a valószínűsége, hogy k db dobozt kell kinyitni?
- Mi a valószínűsége, hogy egy 10 fős társaságban két ember születésnapja egy napra esik (szökévektől eltekintünk)? És 50 főnél? Mekkora csoportra lépi át a valószínűség az 50%-ot?
- 41 millió ötöslottó szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül (azaz előfordulhatnak egyforma kitöltések). Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy telitalálat?
- Az ötöslottó sorsoláson 1-től 90-ig számozott golyókból húznak ki 5 különbözőt. Legyen A az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50, B az, hogy mindegyik kihúzott szám páros, és C pedig, hogy mindegyik kihúzott szám legalább 20. Mennyi lesz $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$?
- Egy urnában van 3 piros és 12 kék golyó. a) Mi a valószínűsége, hogy 5 húzásból lesz pontosan 3 kék? b) 4. húzásra húzom az első pirosat? c) 2 húzásból sikerül mindkét színt kihúzni? Az összes kérdést válaszold meg visszatevéssel és visszatevés nélküli húzás esetén is!
- Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a kockákat egyszerre feldobva pontosan a) egy hatos lesz közöttük? b) két hatos lesz közöttük?
- Geometriai valószínűségek** Béla és Géza megbeszéltek, hogy találkoznak a könyvtárban, de nem egyeztek meg pontos időpontban, csak annyiban, hogy 11 és 12 között. Mi a valószínűsége, hogy tényleg találkoznak, ha legfeljebb fél órát hajlandóak egymásra várni?
- A $(0, 2)$ és $(0, 3)$ szakaszokon választunk találmásra egy-egy pontot, legyenek ezek X és Y . Mennyi a valószínűsége, hogy az X, Y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?
- Van egy r sugarú céltáblám, ahol ezt a sugarat 5 egyenlő részre osztom, így kapok $1/5r$ sugarú bull's eye-t illetve négy koncentrikus körgyűrűt, $1/5r$ szélességű sávval. A bull's eye ér 5 pontot és a sávok kifelé csökkennek 1 ponttal, a legkülső ér 1 pontot. Feltételezve, hogy a táblát mindig sikerül eltalálnom a) mi a valószínűsége, hogy a 3-as sávot találok el? b) 2 lövésből összesen 10 pontot szerzek? c) 2 lövésből összesen 6 pontot szerzek? d) 2 lövésből legalább 8 pontot szerzek?
- Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomnak nincs valós gyöke?
- Függetlenség, feltételes vszség, Teljes vszség tétele** Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $P(A|B) = 0,2$, $P(B|A) = 0,5$ akkor mennyi lesz $P(A)$, $P(B)$ illetve $P(A|\bar{B})$? Független-e A és B ?
- Négy várost utak kötnék össze a következőképpen: A-t összeköti út B-vel és C-vel, illetve D-t is összeköti út B-vel és C-vel. Ezen felül megy út B és C között is. Egy adott téli napon az egyes útszakaszokon egymástól függetlenül $1/5$ valószínűséggel alakul ki hótorlasz. Mekkora a valószínűsége, hogy adott napon el lehet jutni A-ból D-be?

16. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldala fej). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal 10-szer dobva 10 fejet kapunk. E feltétel mellett mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?
17. Egy szabályos kockával dobunk, és ahányast dobtunk, annyi golyót húzunk egy urnából, amiben 5 fehér és 10 fekete golyó van. Mi a valószínűsége, hogy mindegyik fehér, amit húztunk?
18. Egy tétel áru 1% selejtet tartalmaz. Hány darabot kell taláalomra kivennünk és megvizsgálnunk, hogy a megvizsgált darabok között legalább 0,95 valószínűséggel selejtes is legyen, ha az egyes kiválasztott darabokat vizsgálatuk után visszatesszük?
19. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy ekkor eltalálja a helyes választ $1/3$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?
20. Egy számítógép processzorát 3 üzemben készítik. 20% eséllyel az elsőben, 30% eséllyel a másodikban és 50% eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre 10%, 4%, illetve 1%. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?
21. Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk taláalomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, mindhárom kivételhez 1 új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?
22. Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számjegyek összege i , feltéve, hogy a számjegyek szorzata nem nulla?
23. Egy szabályos kockát addig dobunk fel újra és újra, amíg először hatost nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy eközben pontosan egyszer dobunk egyest?
24. **Nevezetes diszkrét eloszlások** Az általam látott kutyák napi száma Poisson eloszlású, 5 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy két egymást követő napon együttesen kevesebb, mint 5 kutyát látok?
25. Milyen eloszlás?
 - a) Ahányadik autó felvesz, amikor kiállok az országútra (mert autóstoppal akarok utazni).
 - b) Ahány autó elmegy 10 perc alatt.
 - c) Ahányadik autó a harmadik piros.
 - d) Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül.
 - e) Ahány kocsi jön 5 perc alatt.
 - f) Ahány kocsi megáll 10 perc alatt.
 - g) Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll.
26. Hétközben (hétfőtől péntekig) 0.25 valószínűséggel késik a reggeli vonat. (a) Mi a valószínűsége, hogy hétközben legfeljebb két napon késik? (b) Legyen jó hét az, amelyen legfeljebb két napon késik. Mi a valószínűsége, hogy 4 hétből legalább 3 hét jó hét lesz?
27. A szem színét egyetlen génpár határozza meg, és a barna szem génje domináns a kék szem génjével szemben. Ez azt jelenti, hogy a két kék szemű génnel rendelkező egyénnek kék szeme lesz, míg a két barna szemű génnel vagy egy barna és egy kék szemű génnel rendelkező egyénnek barna szeme lesz. Az utód a szülők génpárjából egy-egy véletlenszerűen kiválasztott gént kap. Ha egy barna szemű szülőkből álló pár legidősebb gyermeke kék szemű, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a pár négy másik gyermeke (akik közül egyik sem iker) közül pontosan kettő szintén kék szemű?
28. Ha egy biztosító társaság naponta átlagosan 5 kárigényt kezel, akkor a napok hány százalékában van 3-nál kevesebb kárigény? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő 5 napból pontosan 3 napban 4 káresemény lesz? Tegyük fel, hogy a különböző napokon a kárigények száma független.
29. Egy repülőgép hajtóműveinek legalább a felének működnie kell ahhoz, hogy a repülőgép működőképes legyen. Ha minden hajtómű egymástól függetlenül p valószínűséggel működik, akkor p milyen értékek esetén valószínűbb, hogy egy 4 hajtóműves repülőgép működik, mint egy 2 hajtóműves?

30. Tegyük fel, hogy egy egyetem 2400 hallgatója éjjel-nappal kétóránként ellenőrzi az emailjét és egy ellenőrzés 1 percet vesz igénybe (tehát $1/120$ annak a valószínűsége, hogy egy adott hallgató éppen az emailjével van elfoglalva). Mi a közelítő valószínűsége, hogy éppen 19, 20 vagy 21 hallgató ellenőrzi az emailjét?
31. A roulette keréken 38 szám van: 1-től 36-ig, 0 és dupla 0. Ha Kovács úr mindig arra fogad, hogy az eredmény 1-től 12-ig terjed, mi a valószínűsége, hogy (a) Kovács úr elveszti mind az 5 első fogadását, (b) először a negyedik fogadáson nyer?
32. Az AB-negatív vércsoport gyakorisága 1%. Ha 100 embert véletlenszerűen kiválasztunk, akkor (a) mi a közelítő valószínűsége (Poisson eloszlást használva), hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív? (b) mi a pontos valószínűsége, hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?
33. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így többször is próbálkozhatunk ugyanazzal a kulccsal. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból kinyitjuk az ajtót? Mi a helyzet akkor, ha a kipróbált (rossz) kulcsot mindig eldobjuk?
34. Egy diák 0,3 valószínűséggel vizsgázik eredményesen egy olyan tárgyból, ahol az aláírásnak nincs feltétele. Mi a valószínűsége annak, hogy egy tárgyfelvétellel teljesíti a tárgyat, ha egy félévben háromszor futhat neki a vizsgának? Mi a valószínűsége, hogy három tárgyfelvétellel + méltányossággal sem megy át? (a) egy tárgyfelvétellel teljesíti a tárgyat? (b) három tárgyfelvétel és egy méltányossági vizsga után sem teljesíti a tárgyat?
35. A gépeltérítések száma Poisson eloszlású, 50% eséllyel történik legalább egy gépeltérítés egy évben. Mi a valószínűsége, hogy egy évben több, mint 3 gépeltérítés lesz?
36. **Diszkrét várható érték, szórás, kovariancia** Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?
37. Feldobunk egy kockát. Ha páros az eredmény, akkor annyi eurót nyerünk, amennyit dobtunk, de ha páratlant dobunk, akkor annyit veszítünk, amennyit dobtunk. Mi a nyereményünk várható értéke és szórása?
38. Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma. Melyik lesz nagyobb $E(X)$ vagy $E(Y)$? Miért? Számold ki őket pontosan. Számold ki a szórásokat is.
39. Ha $E(X) = 1$ és $D^2(X) = 5$, határozd meg $E[(2 + X)^2]$ -et illetve $D^2(4 + 3X)$ -et!
40. Adj meg olyan véges illetve végtelen értékkeszletű valószínűségi változót, melynek szórása 1!
41. Legyen $X = \{-1, 0, 1\}$ és $Y = |X|$. $P(X = 0) = 1/2$, $P(X = 1) = 1/4$, $P(X = -1) = 1/4$. Mennyi $COV(X, Y)$? Független-e X és Y ?
42. **Folytonos eloszlások** Mennyi legyen c , ha $f(x)$ sűrűségfüggvény? Mi $F(x)$?

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{1}{9}x^2, & \text{ha } 0 < x \leq c \\ 0, & \text{ha } x > c \end{cases}$$

43. Mennyi legyen c , ha $f(x)$ sűrűségfüggvény?

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2), & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x-2}, & \text{ha } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x-2}, & \text{ha } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

44. Mennyi $E(X)$?

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ \frac{2x}{3e^2}, & \text{ha } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

45. Eloszlásfv-e az $F(x) = e^{-e^{-x}}$?

46. Tíz berendezést egyszerre kapcsolunk be. Mindegyik berendezés hibamentes működési ideje exponenciális ideig tart, $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel, egymástól függetlenül. Mekkora valószínűséggel fog közülük legalább öt működni 10 időegység múlva?

47. Egy bizonyos elektronikai eszköz élettartama exponenciális eloszlású 5 év várható értékkel. A gyártásába hiba csúszik és néhány eszköz várható élettartama lecsökken 3 évre (de még mindig exponenciális marad). Az ebben az évben kikerült termékek 70%-a volt jó és 30% ilyen csökkent élettartamú.

- a Ha kiválasztunk egy jó terméket, mi a valószínűsége, hogy az élettartama 2 és 3 év között lesz?
- b Mi a valószínűsége, hogy egy jó termék él még pluszban 3 évet, ha már élt 1-et?
- c Ha egy terméket utánkóvtunk és tovább élt, mint 2 év, mi a valószínűsége, hogy a hibás gyártásból származott?

48. A futár állítólag 15:00 és 16:00 között érkezik meg, egyenletes eloszlással. Mi a valószínűsége, hogy 15:30 és 15:45 között érkezik meg? Ha nem érkezett meg 15:45-ig, mi a valószínűsége, hogy megérkezik 15:55 előtt?

49. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje X a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen 0,05-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

50. Mennyi c ? $P(-1 < X < 1) = ?$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ cx^2, & \text{ha } 0 < x < 5 \\ 1, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$$

51. Mennyi a következő eloszlások várható értéke, varianciája? $F_1(x) = \frac{x^2}{a^2}$ ($0 < x < a$) $F_2(x) = \sqrt{x}$ ($0 < x < 1$)

52. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ körlapról. Jelölje Z a középponttól való távolságát. Mi lesz Z eloszlás- illetve sűrűségfv-e?

53. Egy számítógép élettartama 0 és 10 közé tehető, egyenletes eloszlással. Mi a valószínűsége, hogy ha már 2 évet túlélte még kettőt túl fog élni?

54. Egy adott típusú elektromos berendezések élettartama $EXP(\lambda)$, 2%-uk 1000 üzemórán belül elromlik. Mi a valószínűsége, hogy az átlagosnál tovább bírja? Hány óra garanciát vállaljunk, ha 5% garanciaigényt akarunk kielégíteni?

55. Egy adott termék élettartamát napokban kifejezve az $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ($x > 1$) sűrűségfv modellezi. Mi a valószínűsége, hogy túlél 10 napot? Mi a várható élettartama?

56. Legyen $X \sim Uni(1, 4)$. Mi lesz $(X - 1)^2$ várható értéke?

57. Az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásig exponenciális. Ez a táv átlagosan 6000km. Mi a valószínűsége, hogy

- kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

- több, mint 6500 km után hibásodik meg?
- 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

58. Egy sima oposzum üvöltése egyenletes eloszlású 100dB várható értékkel és $10/\sqrt{3}$ dB szórással.

- Mi az oposzum hangtartománya? Egy olyan műszeren mérünk, ami legfeljebb 100dB-t tud, és ez a műszer kiakad. Mi a valószínűsége, hogy az állat 105dB-nél is hangosabb volt?
- Kiválasztunk a populációból 15 oposzumot és megmérjük az üvöltésüket (minden mérés után visszaengedjük őket a természetbe). Mi a valószínűsége, hogy lesz legalább 2, amelyik hangosabb 105dB-nél?
- A floridai oposzumok hangosabbak, mint az átlag, nekik 120dB és 140dB között van a hangerejük, még mindig egyenletes eloszlással. A floridai oposzumok teszik ki az egész populáció 15%-át a maradék 85% sima. Ha random választok egy oposzumot a populációból, mi a valószínűsége, hogy hangosabb lesz, mint 100 dB? Ha sikerült választanom egyet, amelyik hangosabb, mint 100dB, mi a valószínűsége, hogy az floridai volt?
- Van 10 sima és 3 floridai oposzumom, ha kijelölök közülük random 4-et, mi a valószínűsége, hogy az egy hangos csapat lesz, azaz lesz közöttük legalább 3 floridai?

59. **Poisson-folyamat** Egy adott berendezés várhatóan 1 év alatt megy tönkre, utána cserélni kell, a meghibásodás oka nem kopásból fakad, hanem véletlenszerű elektronikai meghibásodás. Mi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt 2 is tönkremegy? Mi a valószínűsége, hogy

- ha fél évig működött, akkor még legalább egy fél évig fog működni?
- ha az év első negyedében egy már tönkrement, akkor a második negyedévben is tönkremegy egy?
- hogy az 5. csere 8 hónapon belül lesz?

60. Spike és Jet fejvadászok, a sikeres megbízások (bounty-k) száma, amiket havonta együtt teljesítenek Poisson(5) eloszlásúak.

- Mi a valószínűsége, hogy két bounty között több, mint egy hét telik el?
- Ha az első héten begyűjtöttek 3-at, mi a valószínűsége, hogy a 2. hét végéig legalább 2-t fognak?
- a 4. bounty-t a 2. hét végéig gyűjtik be?

61. A K épület környékén a kacsák felbukkanása között eltelt idő exponenciális 2 óra várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy

- 2 kacs között több, mint 3 óra telik el?
- 1 óra alatt több, mint 3 kacs bukkan fel?
- ha már eltelt fél óra kacsaspotting nélkül, akkor még legalább egy órát kell várni, míg az első feltűnik?
- a 4. kacs (a megfigyelés kezdetétől több mint) 1 óra után jelenik meg?

62. A városi tűzoltóságra beérkező cicamentős bejelentések száma Poisson(12) naponta. Mi a valószínűsége, hogy

- 3 óra alatt több, mint 2 cicás bejelentést kapnak?
- két egymást követő cicás riasztás között több, mint 8 óra telik el?
- egy adott napon a 3. cicás riasztás hajnali 4 előtt lesz?

63. A Hírcsárdáról köztudott, hogy előrejelző képessége is van, azaz a megjelenő álhírekből átlagosan évente 5 valóra válik (később). Ezeket potenciális híreknek nevezzük a továbbiakban. Mi a valószínűsége, hogy

- fél év alatt több, mint 3 potenciális hír érkezik?
- két egymást követő potenciális hír között több, mint 3 hónap telik el?

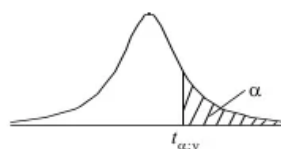
- c ha eltelt már 8 hónap potenciális hír nélkül, még legalább 2 hónapot kell rá várni?
- d Az idei 4. potenciális hír október 1. és dec 31. között fut be?
64. Egy adott régióban évente várhatóan 3 földrengés van. Mi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt lesz több, mint 2 földrengés lesz? Mi a valószínűsége, hogy ha egy földrengés után már eltelt 1 hónap, akkor még legalább egy hónapot kell várni a következőre? Ha az év első felében volt már egy földrengés, mi a valószínűsége, hogy a másodikban is lesz legalább egy? Mi a valószínűsége, hogy az 5. földrengés 8 hónapon belül lesz?
 65. Egy adott elektronikai berendezés várhatóan 1 év alatt megy tönkre, utána cserélni kell, élettartamának eloszlása exponenciális. Mi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt 2 is tönkremegy? Mi a valószínűsége, hogy ha fél évig működött, akkor még legalább egy fél évig fog működni? Ha az év első negyedében egy már tönkrement, akkor a második negyedében is tönkremegy egy? Mi a valószínűsége, hogy az 5. csere 8 hónapon belül lesz?
 66. Egy adott régióban a földrengések száma $\lambda_1 = 2/\text{év}$, az árvizek száma $\lambda_2 = 3/\text{év}$. Mi a valószínűsége, hogy 5-nél több természeti katasztrófa történik egy éven belül? Ha történt 6 természeti katasztrófa, akkor mi a valószínűsége, hogy ebből 3 földrengés volt? Mi a valószínűsége, hogy 2 földrengés között eltelik több, mint fél év? Mi a valószínűsége, hogy a 4. árvíz fél év után lesz?
 67. **Normális eloszlás, CHT** Legyen X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. $P(X > 225) = ?$, $P(215 < X < 229) = ?$, $P(215 < X < 229 | X > 225) = ?$, $P(X > 225 | 215 < X < 229) = ?$
 68. Egy bizonyos chip élettartama normális eloszlású 4400000 óra várható értékkel és 300000 óra szórással. A gyártó szerint a chipek 90%-a túlél legalább 4000000 órát. Igazat mond-e a gyártó?
 69. Egy tehén napi tejhozamát normális eloszlású valváltozóval modellezzük, ahol a $\mu = 21\text{l}$, $\sigma = 1,5\text{l}$. Mi a vszsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 l közé esik?
 70. Legyen $E(X) = 0$, $D(X) = 1$. Mikor lesz $P(X > 0,5)$ nagyobb, ha X eloszlása normális, vagy ha egyenletes?
 71. Egy apasági perben egy szakértő tanú azt vallja, hogy a terhesség hossza (napokban) (azaz a terhbeeséstől a gyermek megszületéséig eltelt idő) megközelítőleg normális eloszlású 270 nap várható értékkel és 100 nap varianciával. Az alperes képes bizonyítani, hogy a gyermek születése előtt 290 nappal kezdődő és a születés előtt 240 nappal végződő időszakban külföldön tartózkodott. Ha az alperes valóban a gyermek apja volt, mekkora a valószínűsége annak, hogy az anya a tanúvallomás által jelzett nagyon hosszú vagy nagyon rövid terhességet élhetett meg?
 72. Egy bináris üzenetet (0-1) kell egy zajos csatornán keresztül küldeni. A zaj miatt 2-t küldünk, amikor az üzenet 1 és -2-t, amikor az üzenet 0. Ha az x küldött üzenet ± 2 , akkor a fogadott üzenet $R = x + N$, ahol N normális eloszlású zaj. Ha $R \geq 0,5$ akkor arra következtetünk, hogy az üzenet 1 volt, ha $R < 0,5$ akkor pedig arra, hogy eredetileg 0 volt. Mi a valószínűsége, hogy hibát vétünk?
 73. Az Alföldön az évi csapadékmennyiség normális eloszlású 500mm várható értékkel, 50mm szórással. Mi a valószínűsége, hogy két egymást követő évben összesen több, mint 1200mm esik majd? Mi a valószínűsége, hogy a következő évben 100mm-rel kevesebb eső lesz, mint a mostaniban? Mi a valószínűsége, hogy a következő 4 évből 2-ben kevesebb, mint 400mm csapadék lesz?
 74. A középiskolai kompetenciateszten 100 pontot lehet elérni, a teljesítmények normális eloszlásúak 70 pont várható értékkel, 20 pont szórással. Egy 20 fős osztályban mi a valószínűsége, hogy az átlag 80 pont felett lesz? Ebből a 20 főből véletlenszerűen kiválasztva 5-öt, mi a valószínűsége, hogy közülük háromnak 60 pont alatt lesz?
 75. Egy bizonyos híd teherbírása normális eloszlású 3 tonna várható értékkel és 1 mázsa szórással. Egy kocsni súlyának eloszlása szintén normális, 3 mázsa várható értékkel és 0,5 mázsa szórással. Hány kocsinak kell a hídon lennie, hogy a híd leszakadásának valószínűsége meghaladja a 0,1-et?
 76. Egy berendezés élettartamának várható értéke 3, szórása 1. A berendezés már működik egy éve, mi a valószínűsége, hogy még működik több, mint 2 évet, ha normális az élettartam eloszlása? Mi a helyzet exponenciális esetén?
 77. Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?

78. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban lévő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 gr-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független?
79. A BME-n egy átlagos nagyelőadás 300 fős, az előadásokon átlagosan a 40%-a a hallgatóknak szokott felbukkanni, ezért eleve kisebb, 200 fős termet rendelnek az órához. Mi a valószínűsége, hogy a hallgatók nem fognak beférni a terembe? (Tegyük fel, hogy a 40% úgy adódik, hogy minden diák egymástól függetlenül 0,4-es valószínűséggel hajlamos bemenni órára.)
80. A BME-n felmerülő technikai problémák orvoslására vezetőség 16 db szerelőt hív. Ők 0 és 1 óra között érkeznek, egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül. Miután mind megérkeztek, a szerelők egymás után próbálkoznak a hibák elhárításával, egy szerelő mókolásának hossza szintén egyenletes eloszlású (valamilyen intervallumon), μ várható értékkel, szórása pedig a várható értékének a 10%-a. Becsüld meg μ -t, ha mind a 16 szaki kipróbálja magát, és 3% eséllyel futnak túl a 100 percen!
81. Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórással ideig töltődnek. Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül? A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
82. Egy izzó élettartamának eloszlása $EXP(0,4)$ napokban mérve. Ha kiég egy izzó, akkor rögtön kicseréljük. Mi a valószínűsége, hogy 25 izzó több, mint 60 napig kitart? Milyen hosszú ideig fog kitartani 90%-os valószínűséggel?
83. **Konvolúció** $X, Y \sim Uni(0, 1)$, mi lesz az $f_{X+Y}(s)$ konvolúciós fv?
84. A hód élettartama egyenletes eloszlású, 11 várható értékkel és $1/\sqrt{3}$ szórással. Mi a valószínűsége, hogy a hód tovább él, mint 10 év? Add meg annak a sűrűségfüggvényét, hogy két hód összesen mennyit él! Összegyűjtünk 10 hódot. Mi a valószínűsége, hogy legalább 3 közülük tovább él, mint 11 év?
85. Kacsákat pakolunk talicskába. A tojók tömege egyenletes eloszlású 2 és 3 kg között, a gácséroké pedig 2 és 4 kg között. Mi lesz egy tojó és egy gácsér együttes tömegének sűrűségfv-e? Hány tojó fér bele a talicskába 90%-os valószínűséggel, ha a talicska teherbírása 1 mázsa?
86. Los Angelesben az éves eső normális eloszlású, várható értéke 30 cm, szórása 8 cm. Mi a valószínűsége, hogy 2 egymást követő év együttes esőzése meghaladja a 63 cm-t? Mi a valószínűsége, hogy a következő év esőzése több, mint 8 cm-rel meghaladja az ideit? (A különböző évek esőzései függetlenek egymástól.)
87. Egy augusztusi napon a csillaghullások száma $Poisson(10)$. Mi a valószínűsége, hogy egymást követő 2 napon együttesen több, mint 25 csillaghullás lesz? Ha két napon együttesen volt 15 csillaghullás, akkor mi a valószínűsége, hogy az első napon 3 db volt?
88. **Vegyes eloszlások** Felfogadok egy kivitelezőt felújításhoz, aki a munkát csak később, $EXP(\lambda)$ idő múlva tudja elkezdeni. Maga a munka legalább 4, legfeljebb λ napot vesz igénybe ($\lambda \geq 4$), de nem tudjuk pontosan meddig tart: a fenti két határ között bármilyen időtartam előfordulhat egyenletes eloszlással. Mennyi λ értéke, ha várhatóan 10 nap alatt készülünk el, a kezdeti várakozást is beleszámolva?
89. **2D eloszlások** Milyen c-re sűrűségfv? Mik a peremsűrűségek? $f(x, y) = c(x + xy + y)$ $0 < x < 1, 0 < y < 1$
90. $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $x, y > 0$ Független-e X, Y ?
91. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ $0 < y < x^2, 0 < x < 1$ tartományon. Mennyi $COV(X, Y)$? $E(Y|X)$? $P(Y > X)$?
92. Legyen X, Y együttes sűrűségfv-e $f(x, y) = c \cdot (x^2 + y^2)$ a $0 < y < 1 - x^2, -1 < x < 1$ tartományon, 0 egyébként. Mennyi a c ? Mik a peremsűrűségek?
93. Reggel taxival megyek az egyetemre (lol). A várakozási időm percekben mérve $X \sim EXP(0, 1)$. Este taxival megyek haza, a várakozási időm percekben mérve $Y \sim EXP(0, 2)$. X, Y függetlenek. Mi lesz $f(x, y)$? Mennyi $P(X + Y < 15)$? $P(X < Y) = ?$

94. Legyen $f(x, y) = c(x+y)$, $0 \leq x, y \leq 1$. Számold ki a következőket: c , $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_{1|2}(x|y)$, $f_{2|1}(y|x)$, $P(X < Y)$, $P(X^2 > Y)$!
95. Legyen $f(x, y) = \frac{x+3y}{2}$, $0 < x, y < 1$. Mik a peremsűrűségek?
96. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c \cdot x^2 y$ a $0 < x < 4, 0 < y < \sqrt{4-x}$ tartományon (és nulla egyébként). Számold ki c -t, a peremsűrűségeket, mindkét feltételes várható értéket! Független-e X és Y ? (Indokolj!)
97. Legyen X, Y egyenletes eloszlású azon a négyszögön, melynek csúcsai: $(1; 1), (3; 1), (3; 2), (1; 2)$. Mi lesz az együttes eloszlás? Mik a peremsűrűségek? Mik a feltételes sűrűségek, várható értékek?
98. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c \cdot x$ a $0 < x < 1, e^x < y < (e-1)x$ tartományon (és nulla egyébként). Számold ki c -t, peremsűrűségeket, mindkét várható értéket! Független-e X és Y ? (Indokolj!)
99. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = xe^{-(x+y)}$ ha $0 < x, y$ (és nulla egyébként). Számold ki a peremsűrűségeket, feltételes sűrűségeket! Független-e X és Y ? (Indokolj!)
100. Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = c \cdot xy$ a $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x^2$ tartományon (és nulla egyébként).
- Számold ki c -t! (3p)
 - Számold ki a peremsűrűségeket! (4p)
 - Számold ki a várható értékeket $E(X), E(Y)$ -t! (6p)
 - Független-e X és Y ? (Indokolj!) (1p)
101. **Statisztika** Egy diszkrét eloszlás a következőképpen néz ki: $P(X = 0) = \frac{5\Theta}{4}$, $P(X = 2) = \frac{2-2\Theta}{4}$, $P(X = 4) = \frac{1-2\Theta}{4}$, $P(X = 5) = \frac{1-\Theta}{4}$. Adj maximum likelihood becslést a Θ paraméterre, ha a mintánk a következő: $(0, 2, 4, 4, 5, 2, 5, 5)$.
102. A következő diszkrét eloszlásunk van: $P(X = 1) = \frac{1-\Theta}{2}$, $P(X = 2) = \frac{2-\Theta}{2}$, $P(X = 3) = \frac{2\Theta-1}{2}$. Adj Maximum Likelihood becslést Θ -ra ha az adatsorunk: $(1, 2, 2, 1, 3, 3)$
103. Egy diszkrét eloszlás a következőképpen néz ki: $P(X = 1) = \frac{2\Theta-1}{3}$, $P(X = 2) = \frac{3-\Theta}{3}$, $P(X = 5) = \frac{1-\Theta}{3}$. Adj maximum likelihood becslést a Θ paraméterre, ha a mintánk a következő: $(1, 2, 1, 2, 1, 1, 5, 2, 5, 2)$.
104. Egy diszkrét eloszlás a következőképpen néz ki: $P(X = 1) = 2\Theta$, $P(X = 2) = \Theta$, $P(X = -1) = 3\Theta$, $P(X = 1) = 1 - 6\Theta$. Adj maximum likelihood becslést a Θ paraméterre, ha az 1-es érték 12-ször, a 2-es érték 4-szer és a -1-es érték 12-szer, a 0 pedig 22-ször fordult elő!
105. A következő diszkrét eloszlásunk van: $P(X = 1) = 2\Theta$, $P(X = 2) = 3\Theta$, $P(X = 3) = 1 - 5\Theta$. Adj Maximum Likelihood becslést Θ -ra ha az adatsorunk: $(1, 2, 3, 1, 1, 2)$
106. A következő diszkrét eloszlásunk van: $P(X = -1) = \Theta$, $P(X = 1) = 3\Theta$, $P(X = 2) = 1 - 4\Theta$. A mintákban a -1 érték 15-ször, az 1 érték 55-ször és a 2 érték 30-szor szerepel.
107. Azt akarjuk felmérni, hogy hányan cigiznek az egyetemen, feltételezve, hogy a cigizők száma normális eloszlású. Random időpontokban bejárjuk a campus-t és feljegyezzük, hogy hány dohányzó embert láttunk. A következő adatokat kapjuk: $(10, 12, 20, 15, 9, 14, 25, 25)$ Konstruálj 95%-os konfidenciaintervallumot a cigizők várható számára! Ha azt is tudjuk valahonnan, hogy a szórás 6, akkor mi lesz az új becslés a konfidenciaintervallumra?
108. Az E épületben a következő hőmérsékleteket mértük (különböző napokon): $15^\circ, 16^\circ, 17^\circ, 16^\circ, 18^\circ$, a hőmérséklet eloszlását normálisnak tekintjük. Adj 95% megbízhatóságú kondenciaintervallumot, ha
- a szórás ismert, 2°C
 - a szórás ismeretlen
 - A vezetőség állítja, hogy az átlaghőmérséklet az E-ben 18°C . Vizsgáld meg ezt a hipotézist 5% szignifikanciaszinten abban az esetben, ha tudjuk a szórást!

109. A hódok száma a Dunakanyarban normális eloszlást követ. Különböző időpontokban feljegyezzük, hány hódot láttunk: (20,35,41,18,25,29). Az a hipotézisünk, hogy a hódok várható száma 30. Döntsd el 95%-os biztonsággal, hogy a hipotézis igaz-e! Ha azt is tudjuk valahonnan, hogy a szórás 2, akkor mi lesz a konfidenciaintervallum?
110. Egy berendezés élettartamára a következő mintánk van (években): (2; 3; 4; 2;5; 3; 3; 3;5; 4; 2; 4; 3; 3; 3;5; 2; 3; 4). Nem tudjuk az élettartam eloszlását.
- Elsőre azt feltételezzük, hogy az eloszlás exponenciális. Adj Maximum Likelihood becslést a λ -ra!
 - Valaki megmondja, hogy a szórás 1, és ezek után mégiscsak azt feltételezzük, hogy az eloszlás normális. Adj a fenti minta alapján 90%-os szinthez konfidenciaintervallumot a várható értékre!
111. A Duna-parton talált kövek térfogata a következő: (6,5,4,10,1,7) cm^3 -ben. Az a hipotézisünk, hogy a várható térfogat $5cm^3$. Döntsd el 95%-os biztonsággal, hogy a hipotézis igaz-e! Ha azt is tudjuk valahonnan, hogy a szórás 2, akkor mi lesz a konfidenciaintervallum?
112. Az alábbi adatok 10 hallgató pontszámait tartalmazzák, ezek normális eloszlásúak 10 szórással. Ezek alapján adj a dolgozat várható pontszámára 95%-os megbízhatóságú konfidenciaintervallumot.
113. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy a napi középhőmérséklet október 18-án Budapesten 15 fok alatt van-e? Az elmúlt 4 év napi középhőmérsékletei a következők voltak: 14,8; 12,2; 16,8; 11,1, az adatok normális eloszlásból származnak. Legyen $H_0 : \mu \geq 15$. Tegyük fel, hogy a napi középhőmérséklet szórása 2. Teszteld a hipotézist $\alpha = 0,05$ mellett! Mi lesz a konfidenciaintervallum? Mi lesz a p-érték? Teszteld a hipotézist úgy, hogy nem használod a szórásra kapott információt (azaz nem tudjuk, hogy mennyi a szórás)!
114. A BME-re jelentkezettek száma az elmúlt években: (19611,16518,20549,18616,17523,22682,23456,25513,20112). A vezetőségnek van oka feltételezni, hogy várhatóan 21310 jelentkező lesz a következő évben. Alátámasztják-e az adatok ezt a hipotézist $\alpha = 0,01$ mellett?
115. A K épületnél tanyázó kacsák tartózkodási helyének várható értékét szeretnénk megbecsülni (azt feltételezzük, hogy normális eloszlású a tartózkodási helyük). Random időpontokban feljegyeztük, hogy a K és MM közötti 50 méteres úton hol bukkantak fel: (1,2,10,15,2,4,5,25,45,2) Konstruálj 95%-os konfidenciaintervallumot a kacsák várható tartózkodási helyére! Ha azt is tudjuk valahonnan, hogy a szórás 2, akkor mi lesz az új becslés a konfidenciaintervallumra?
116. Egy új üvegszálas gumiabroncs gyártója azt állítja, hogy az abroncs átlagos élettartama legalább 40 000 mérföld. Ennek az állításnak az igazolására 12 gumiabroncsból álló mintát tesztelnek, amelyek élettartama (1000 mérföldben kifejezve) a következők: (36,1; 40,2; 33,8;38,5;42;35,8;37;41;36,8;37,2;33;36). Teszteld ezt a hipotézist 5% szignifikancia mellett!

The table gives the values of $t_{\alpha;v}$ where $\Pr(T_v > t_{\alpha;v}) = \alpha$, with v degrees of freedom



$\alpha \backslash v$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073

	$\Phi(z)$									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999