

1.

$$\begin{aligned} a) \quad 2x + 4y + z &= 3 \\ 3x + 5y + 7z &= 1 \\ x + y + 4z &= 8 \end{aligned} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Végezünk Gauss-eliminációt az együttes mátrixra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_2 - 3S_1 \\ \\ S_3 - S_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 11/2 & -7/2 \\ 0 & -1 & 7/2 & 13/2 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \cdot S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -11/2 & 7/2 \\ 0 & -1 & 7/2 & 13/2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -11/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -11/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right]$$

A mátrixot lépésről lépésre alakítsa hertzei.

Most hozzá redukált lépés alá

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1-11/2 & 7/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow[S_2 + \frac{11}{2}S_3]{S_1 - \frac{1}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - 2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \leftrightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 52 \\ y & = & -24 \\ z & = & -5 \end{array}$$

Mivel minden sorban van vezéregg, így a rendszer egyértelmű és visszafelé könnyen leolvasható:

$$x = 52, \quad y = -24, \quad z = -5$$

$$\textcircled{b} \quad \begin{aligned} x + 2y + 5z &= 1 \\ 2x + 6y + 16z &= 2 \\ 3x + 7y + 18z &= 3 \end{aligned} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 16 & 2 \\ 3 & 7 & 18 & 3 \end{array} \right]$$

Keressünk végre Gauss-eliminációt az együtthatómátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 16 & 2 \\ 3 & 7 & 18 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{2} S_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] S_3 - S_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] S_1 - S_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{aligned} x - z &= 1 \\ y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Mivel a z onlopályaán minden
vezérelges, így $\vec{0}$ szabad változó len.
A többlei változót ecle kifejezve:

$$x = 1 + z \quad \text{és} \quad y = -3z.$$

A megoldások inuen:

$$x = 1 + t, \quad y = -3t, \quad z = t.$$

Vagyis végtelen sok megoldás len,
himen z értéke tetszőleges t reals
szám lehet (mivel szabad változó).

$$\textcircled{C} \quad 2x + 2y + 4z = 2$$

$$3x + y + 3z = 5 \iff$$

$$x - y - z = 7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right]$$

Végrehajtunk Gauss-eljárást az együttes
leátmátrixon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} S_2 - 3S_1 \\ S_3 - S_1 \end{array}} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + 2S_2} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

Egy önellenes sorot
kaptunk, így az egyen-
letrendszernek
nincsen megoldása.

$$\textcircled{d} \quad x + y + 2z = 0$$

$$2x + 2y + 3z = 2$$

$$x + 3y + 3z = 4$$

$$x + 2y + z = 5$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Öldjük meg Gauss - eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_2 \leftrightarrow S_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{2} S_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_4 - S_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{-S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{S_4 + \frac{3}{2}S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - \frac{1}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

Mivel minden sorban van található
vezéregys, így a megoldás egyértelmű:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = -2$$

e

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14$$

$$2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 28$$

$$x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 16$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & | & 28 \\ 1 & 5 & 9 & 2 & 3 & | & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$



Az x_3 és x_5

önkényben minden

verégy, így eh

melletti értékek lennek.

$$x_1 - x_3 - 2x_5 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$$

$$x_4 = 2$$

A f6ll6v6 v6ltoz6t v6l6h6 h6f6j6rve:

$$x_1 = 2 + x_3 + 2x_5, \quad x_2 = 2 - 2x_3 - x_5, \quad x_4 = 2.$$

M6vel x_3 6s x_5 t6tr6n6leget6s 6rt6het
felv6het, 6gy a megold6s:

$$x_1 = 2 + t + 2s, \quad x_4 = 2,$$

$$x_2 = 2 - 2t - s, \quad x_5 = s.$$

$$x_3 = t,$$

(ahol $t, s \in \mathbb{R}$ t6tr6n6leget6sek)

2.

a) Itt α egy előre rögzített valós szám

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + \alpha y &= 4 \end{aligned} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 4 \end{array} \right]$$

Gauss-eliminációval oldjuk meg:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha - 6 & 1 \end{array} \right]$$

A következő lépés merint $\alpha - 6$ -al kellene osztani. Azonban ezt csak akkor az egyenletben tehetjük meg, ha az nem nulla. Az eseteket így két kell választani:

1. eset: $\alpha = 6$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

Önellentmondásosort kaptuk. Ebben az esetben nincs megoldás.

2. eset: $\alpha \neq 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & \alpha - 6 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1/(\alpha - 6) \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 - 2/(\alpha - 6) \\ 0 & 1 & | & 1/(\alpha - 6) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 - \frac{2}{\alpha - 6} \\ y = \frac{1}{\alpha - 6} \end{matrix}$$

A megoldás ebben az esetben egyértelmű lesz.

Összefoglalva:

Nincs megoldás, ha $\alpha = 6$.

A megoldás egyértelmű:

$$x = 1 - \frac{2}{\alpha - 6}, \quad y = \frac{1}{\alpha - 6},$$

ha $\alpha \neq 6$.

b

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 6 \\ 2x + 5y + \beta z &= 6 \\ 3x + 6y + 10z &= 7 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 6 \\ 2 & 5 & \beta & | & 6 \\ 3 & 6 & 10 & | & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 6 \\ 2 & 5 & \beta & | & 6 \\ 3 & 6 & 10 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 2 & 5 & \beta & | & 6 \\ 3 & 6 & 10 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & \beta-6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & \beta-6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2\beta-12 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 33-4\beta \\ 0 & 1 & 0 & | & 2\beta-12 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

A megoldás, a β minden értéke esetén egyértelmű lesz:

$$x = 33 - 4\beta, \quad y = 2\beta - 12, \quad z = -2$$

3.

a $\underbrace{A}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{B}_{3 \times 1}$ } Elvégezhető, az eredmény: 3×1 -es.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}} \right\} AB = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

b $\underbrace{B}_{3 \times 1} \cdot \underbrace{A}_{3 \times 3}$ } Nem végezhető el.

c $\underbrace{C}_{1 \times 3} \cdot \underbrace{B}_{3 \times 1}$ } Elvégezhető, az eredmény 1×1 -es

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [-1 \ -3 \ 1] \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \end{array} \right\} CB = [-3]$$

d) $2B$ még elvégezhető:

$$2 \cdot B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{2B}_{3 \times 1} + \underbrace{D}_{3 \times 2} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2B \\ D \end{array}} \right\} \text{Nem végezhető el.}$$

$$\underbrace{D}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{A}_{3 \times 3} \left. \vphantom{\begin{array}{l} D \\ A \end{array}} \right\} \text{Nem végezhető el.}$$

④ $A \cdot D$ } Elvegethöt, or
 $3 \times 3 = 3 \times 2$ } ordinary 3×2 -es.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{array} \right] \left\{ AD = \left[\begin{array}{cc} 16 & 10 \\ 22 & 16 \\ 28 & 22 \end{array} \right] \right.$$

⑨ $AD + \frac{1}{2}D$ } Elvegethöt, or
 $3 \times 2 + 3 \times 2$ } ordinary 3×2 -es.

$$\left[\begin{array}{cc} 16 & 10 \\ 22 & 16 \\ 28 & 22 \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 16 & 11 \\ 23 & 18 \\ 30 & 22 \end{array} \right] = AD + \frac{1}{2}D.$$