

1.

a) A feladatban szereplő halmaz:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

Ez viszont nem lesz altér, mivel a skalárral való szorzás kiveret a halmazból. Például

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V \quad \text{és} \quad -1 \in \mathbb{R},$$

$$\text{de } (-1)\underline{v} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin V.$$

b) A halmaz

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}.$$

Ekkor V altér, mivel zárt a vektortén műveletekre:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}.$$

2.

a) A párhuzamos összetevő:

$$\underline{a}_p = \frac{\langle \underline{v} | \underline{u} \rangle}{\underbrace{\|\underline{v}\|^2}_{(*)}} \cdot \underline{v}$$

$$(*) = \frac{\langle \underline{v} | \underline{u} \rangle}{\|\underline{v}\|^2} = \frac{3 \cdot 12 + (-4) \cdot (-9)}{3^2 + (-4)^2} =$$

$$= \frac{18 + 32}{9 + 16} = \frac{72}{25} = \frac{72}{25}$$

vektor

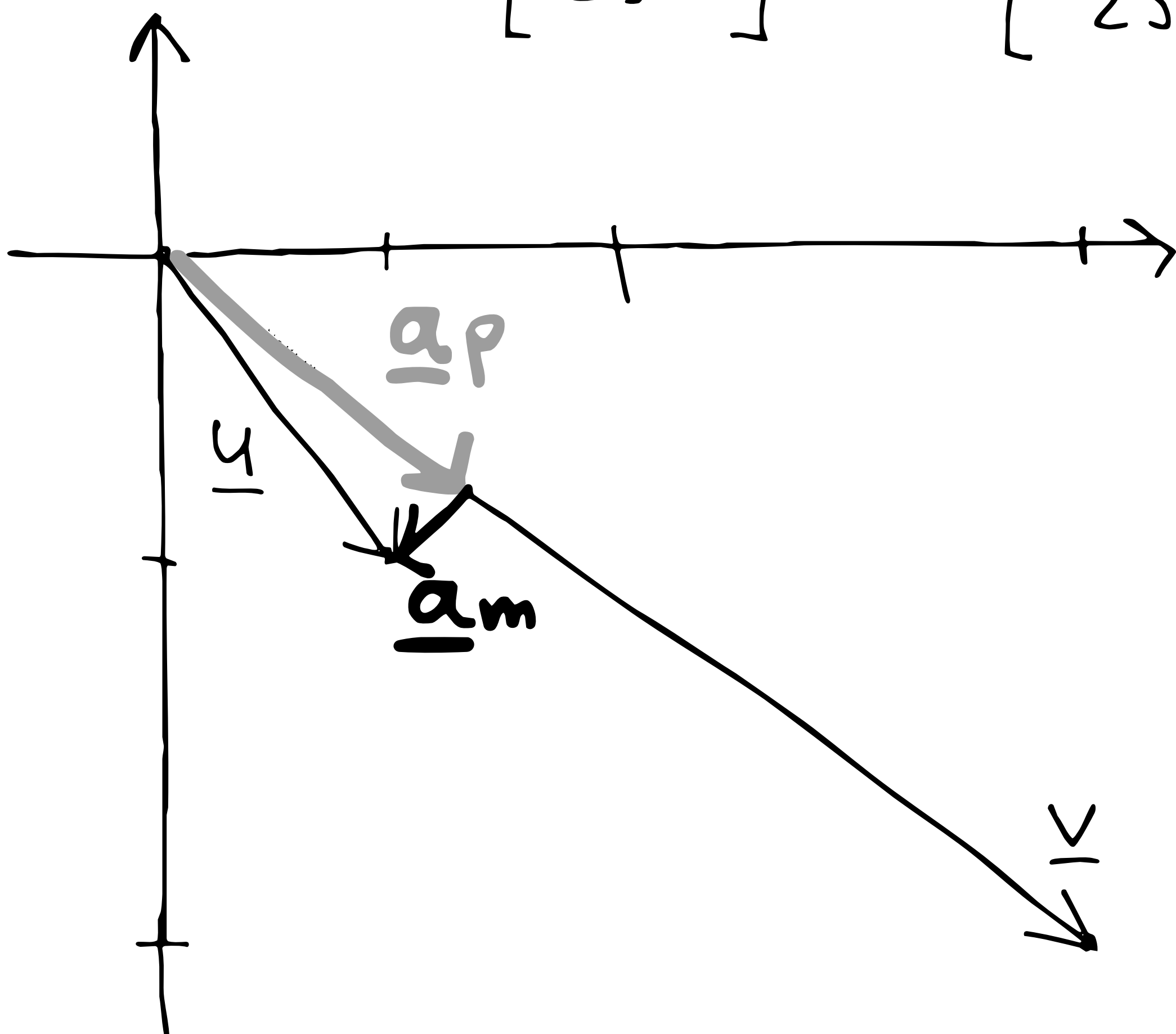
$$\underline{a}_p = \frac{72}{25} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{216}{25} \\ -\frac{288}{25} \end{bmatrix}$$

A merőleges összetevő ehhez

$$\underline{a}_m = \underline{u} - \underline{a}_p = \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{216}{25} \\ -\frac{288}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{84}{25} \\ \frac{63}{25} \end{bmatrix}.$$

A felbontás tehát:

$$\underline{u} = \underline{a}_p + \underline{a}_m = \begin{bmatrix} \frac{216}{25} \\ -\frac{288}{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{84}{25} \\ \frac{63}{25} \end{bmatrix}.$$



b) Az a) réssel teljesen analóg módon

$$\begin{aligned}\frac{\langle \underline{z} | \underline{w} \rangle}{\|\underline{z}\|^2} &= \frac{(-2) \cdot 5 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \\ &= \frac{-10 - 6 - 4}{4 + 4 + 4} = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

A párhuzamos összetevő innen:

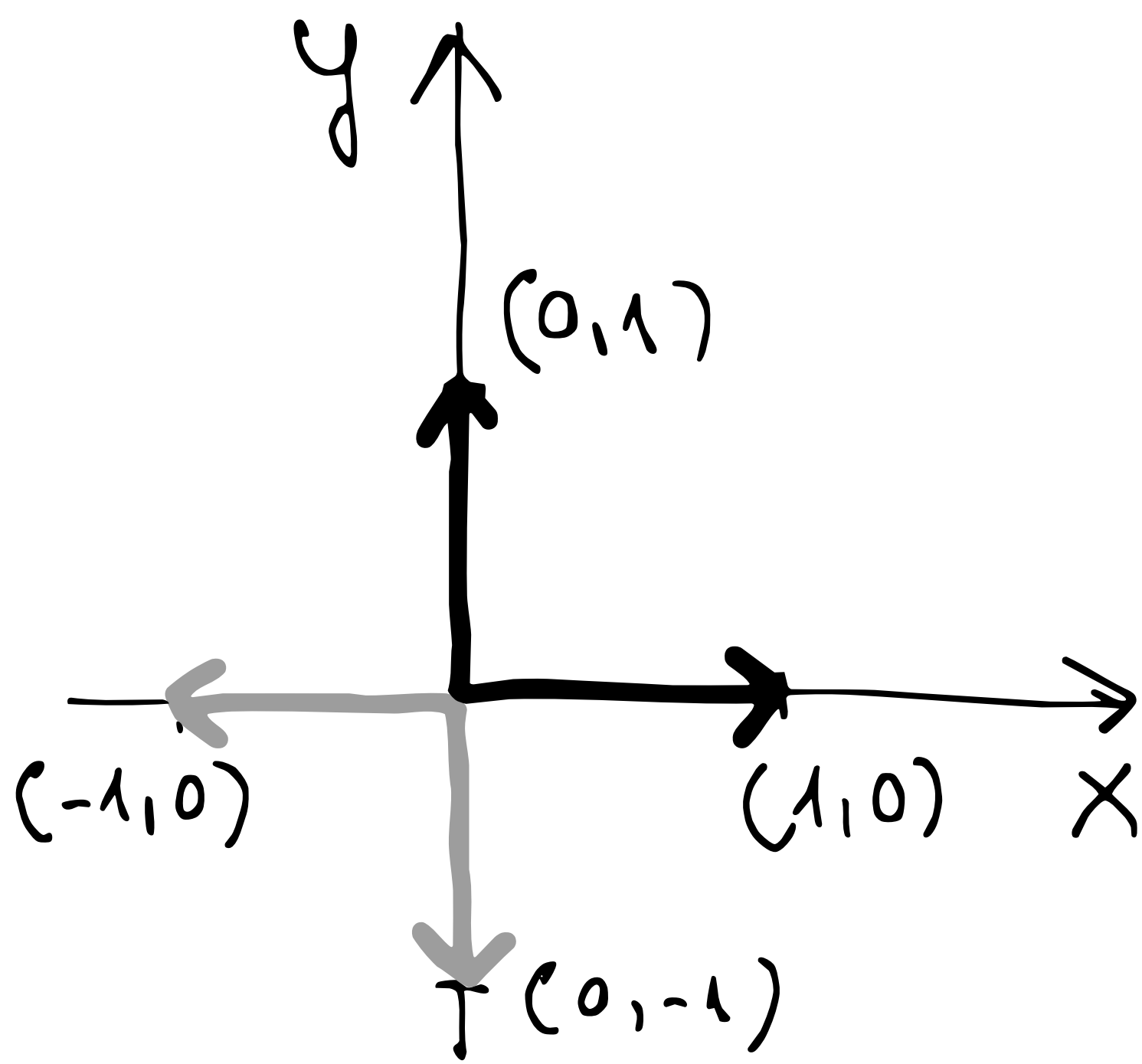
$$\underline{b}_p = -\frac{5}{3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

A merőleges összetevő

$$\underline{b}_m = \underline{w} - \underline{b}_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

3.

a) Írassuk meg a standard bázis képeit.

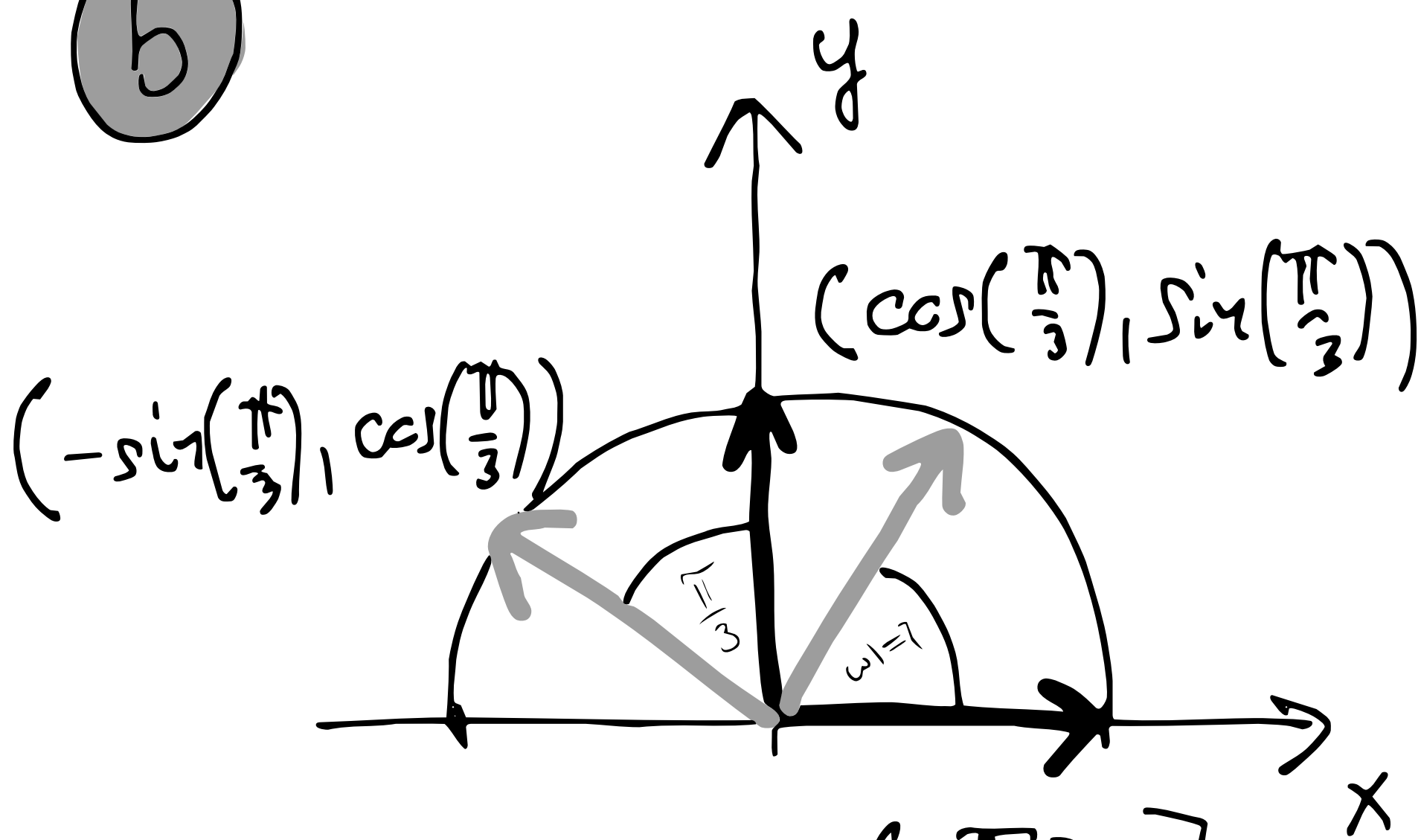


$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A mátrix ez alapján: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b)



Írassuk meg, hogy mi lesz a standard bázis-képe a képe

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

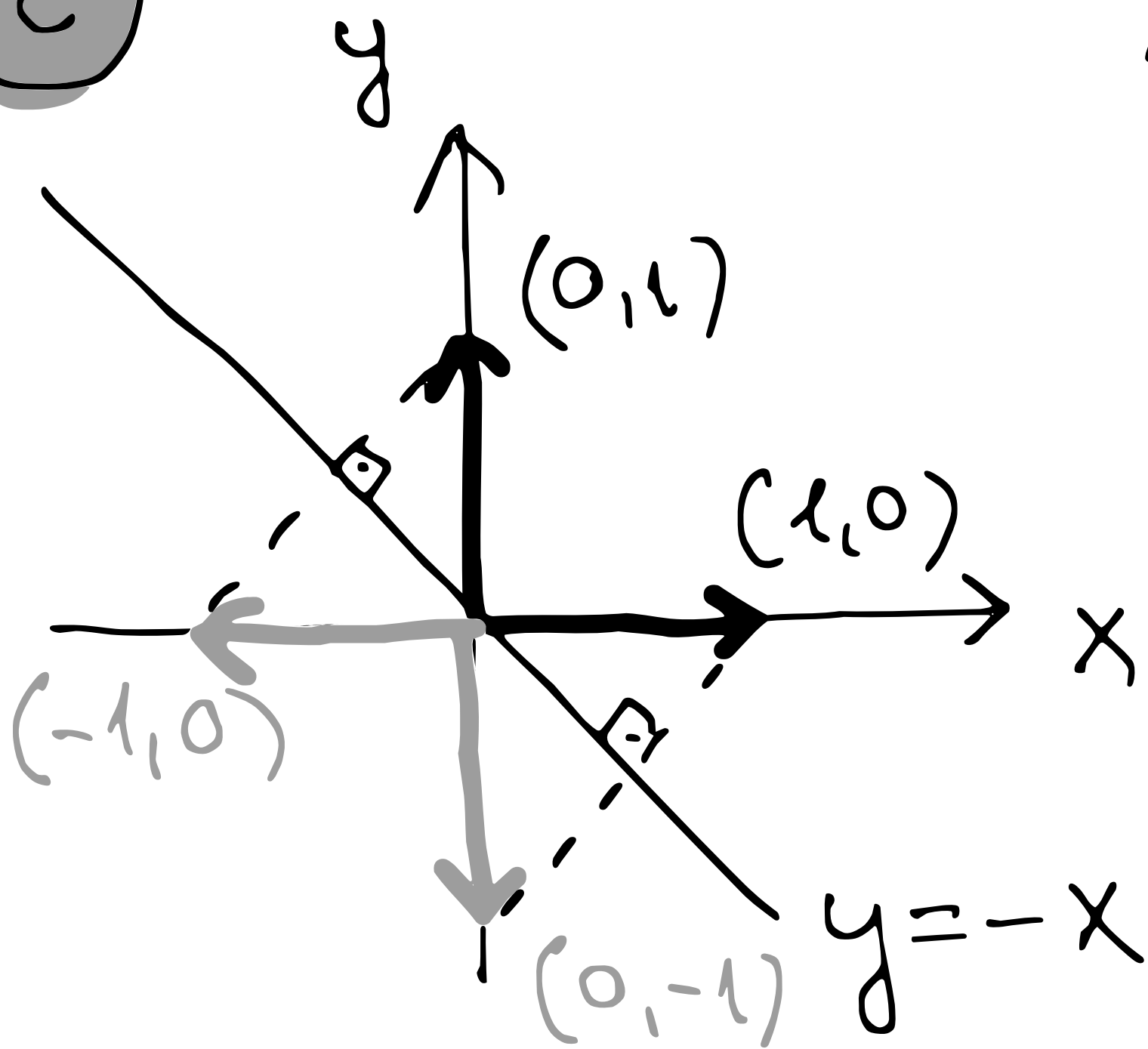
A trigonometrisches függvényekhez hártható:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A mátrix ilyen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c



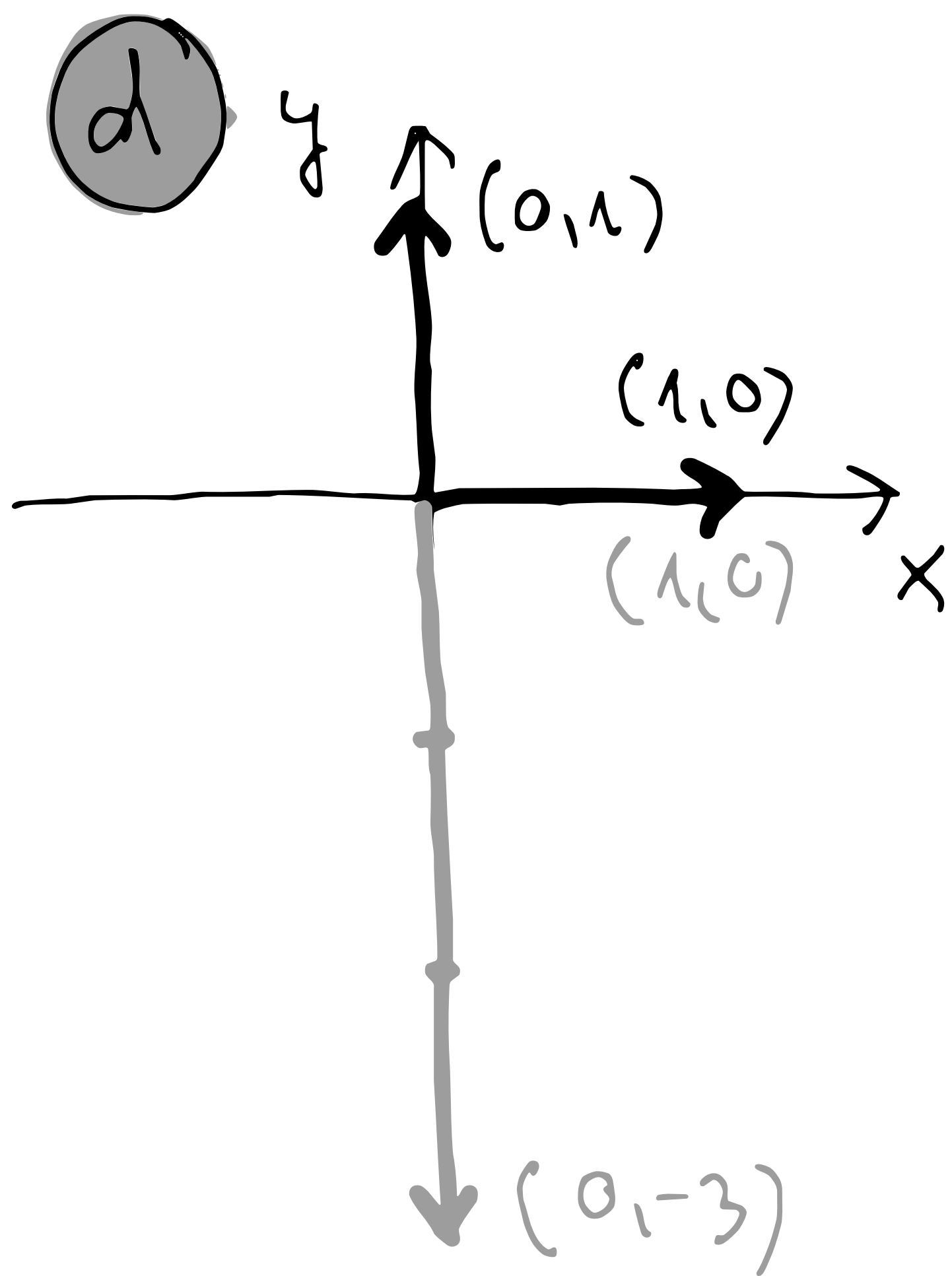
A standard bázis képe:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$



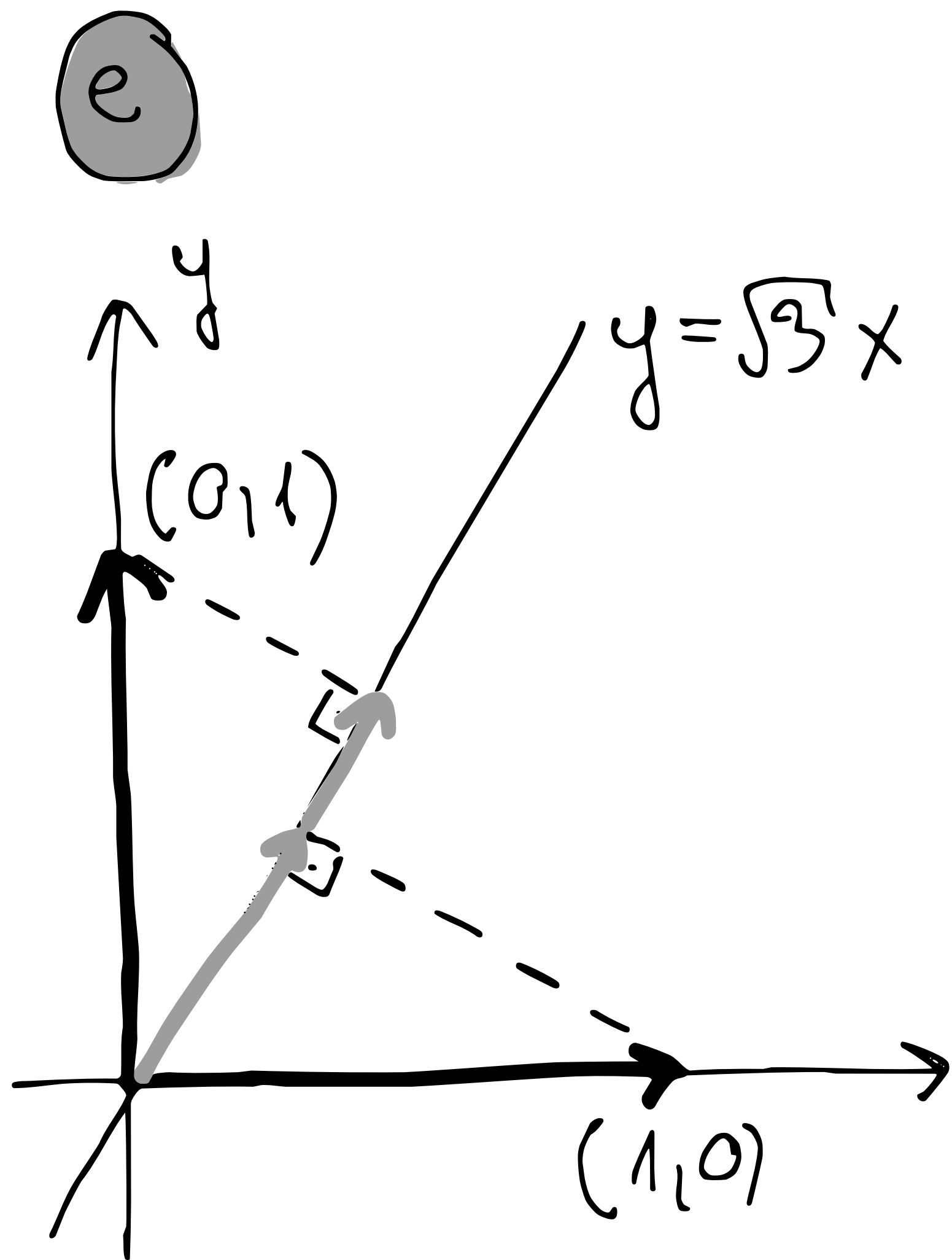
A standard bázis képe:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$



Vegyük észre, hogy az egyenesre való merőleges vetítés megegyezik az egyenes irányvektorára történő vetítéssel.

Egy irányvektor:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

A standard basis elemeinek a képei ehhez:

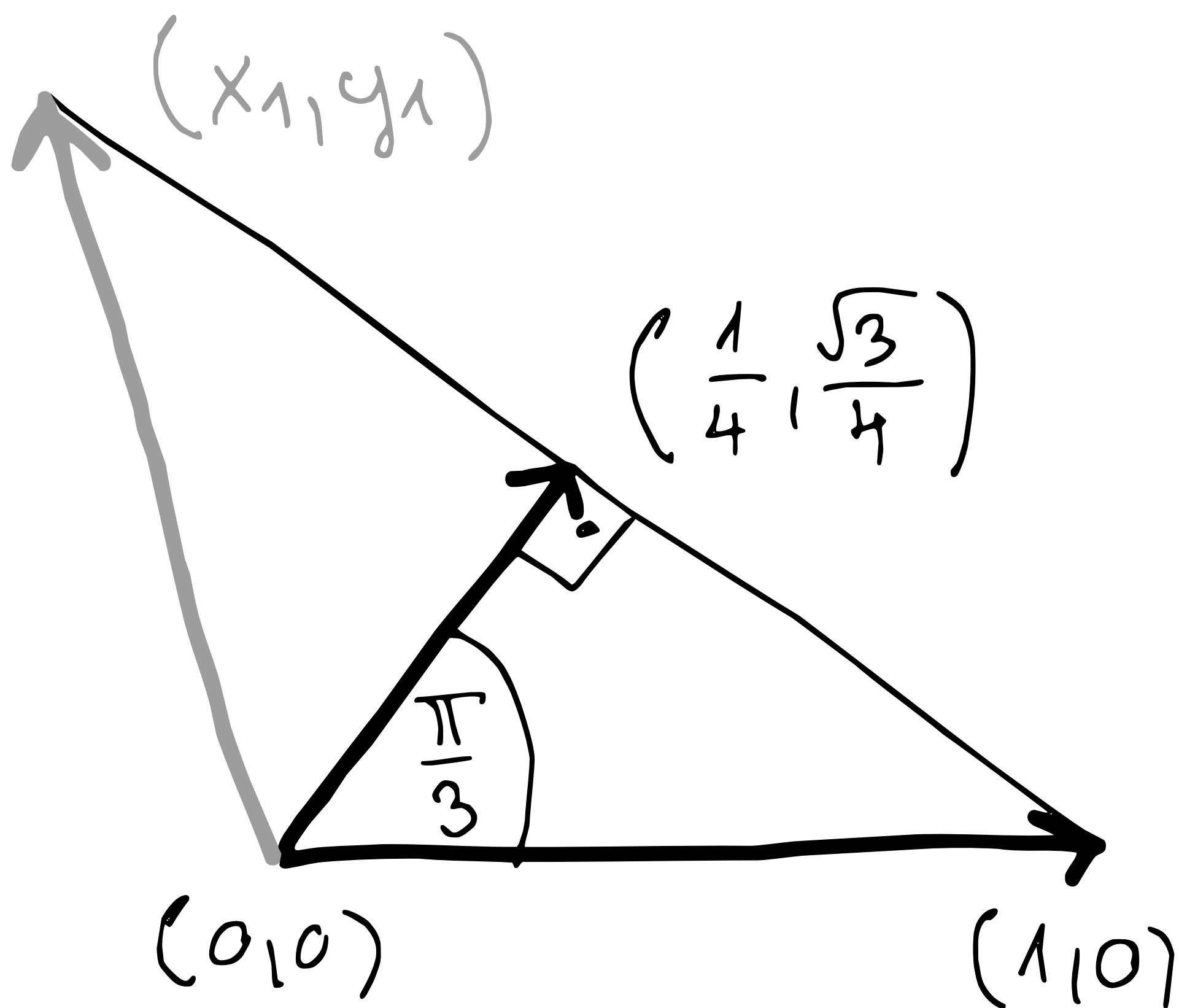
$$\underline{e}_1 \mapsto \frac{\langle \underline{v} | \underline{e}_1 \rangle}{|\underline{v}|^2} \cdot \underline{v} = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0}{\underbrace{1^2 + \sqrt{3}^2}_{\frac{1}{4}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 \mapsto \frac{\langle \underline{v} | \underline{e}_2 \rangle}{|\underline{v}|^2} \cdot \underline{v} = \frac{1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1}{\underbrace{1^2 + \sqrt{3}^2}_{\frac{\sqrt{3}}{4}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

A mátrix innen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

4 Az előző feladatban a területet már kiszámoltuk, innen a tükörkép csak pár lépés:



Az alábbi leolvasható, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Kaiserle' módszerrel kapható megvaldás a
másik standard bázisban képzés:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A mátrix tehát:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Megj.: Ez egy unitár forgatás
mátrixa is lehet egyben?

9) Hamaraljuk ki, hogy lineáris leképezések egyenestérnyűinál a mátrixa, a mátrixok megfelelő sorrendben betett normála len.

A forgatás mátrixa már megvan, most keressük meg a vektort is.

Hamaraljuk a leírást, azt tanulunk a párhuzam és merőleges önszorzásra bontásnál. Mivel a $(2, 1)$ vektor az egyenes irányvektora, így a vele párhuzamos önszorzót kell megkeresni $(1, 0)$ és $(0, 1)$ -ek.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

A végleges mátrixa: $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

A két lehetséges kompozíciójának a mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{A mátrix ehhez}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{1-2\sqrt{3}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{10} & \frac{1-2\sqrt{3}}{10} \end{bmatrix}$$

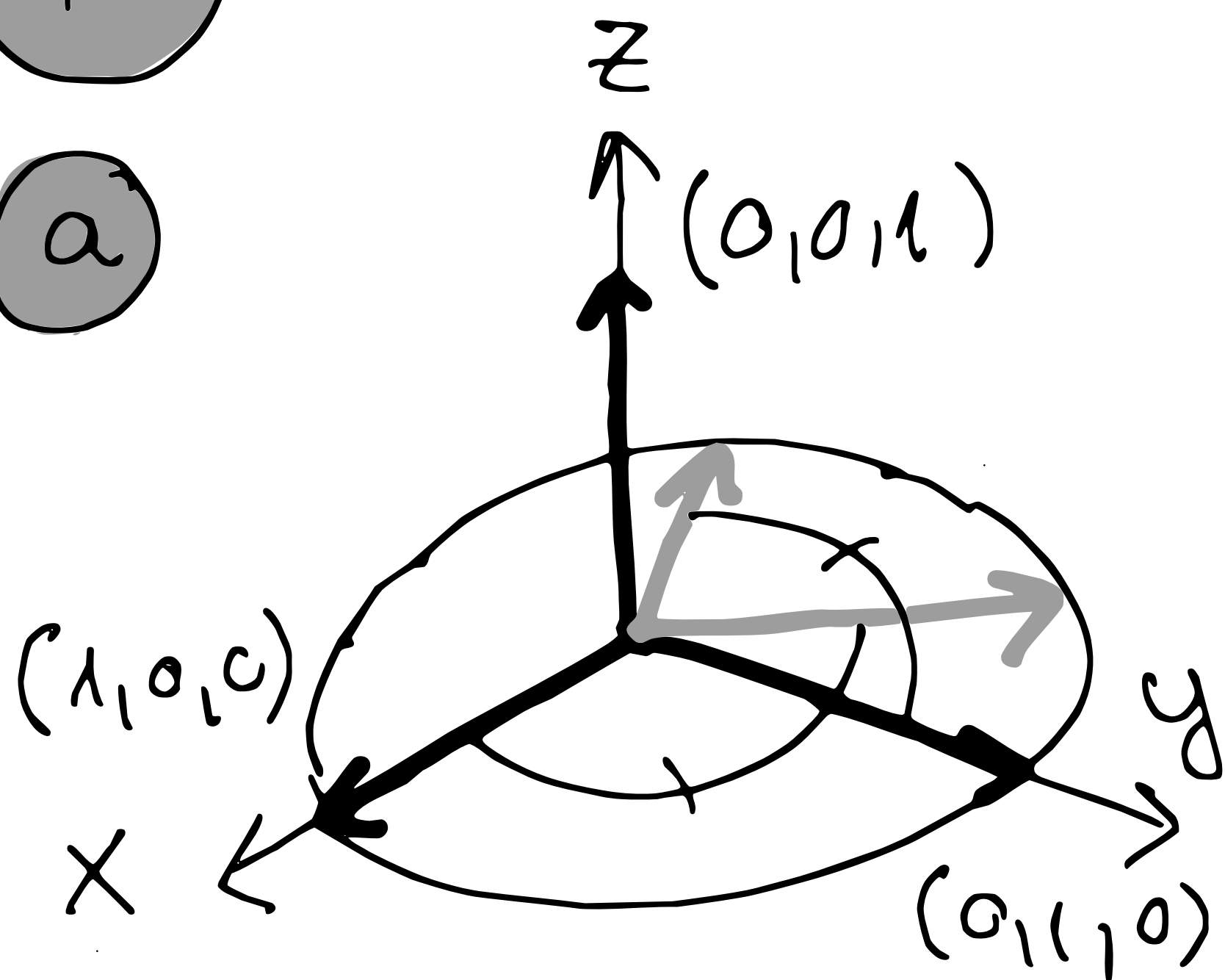
h szorzatban **g**-hez:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \quad \text{A mátrix ehhez:}$$

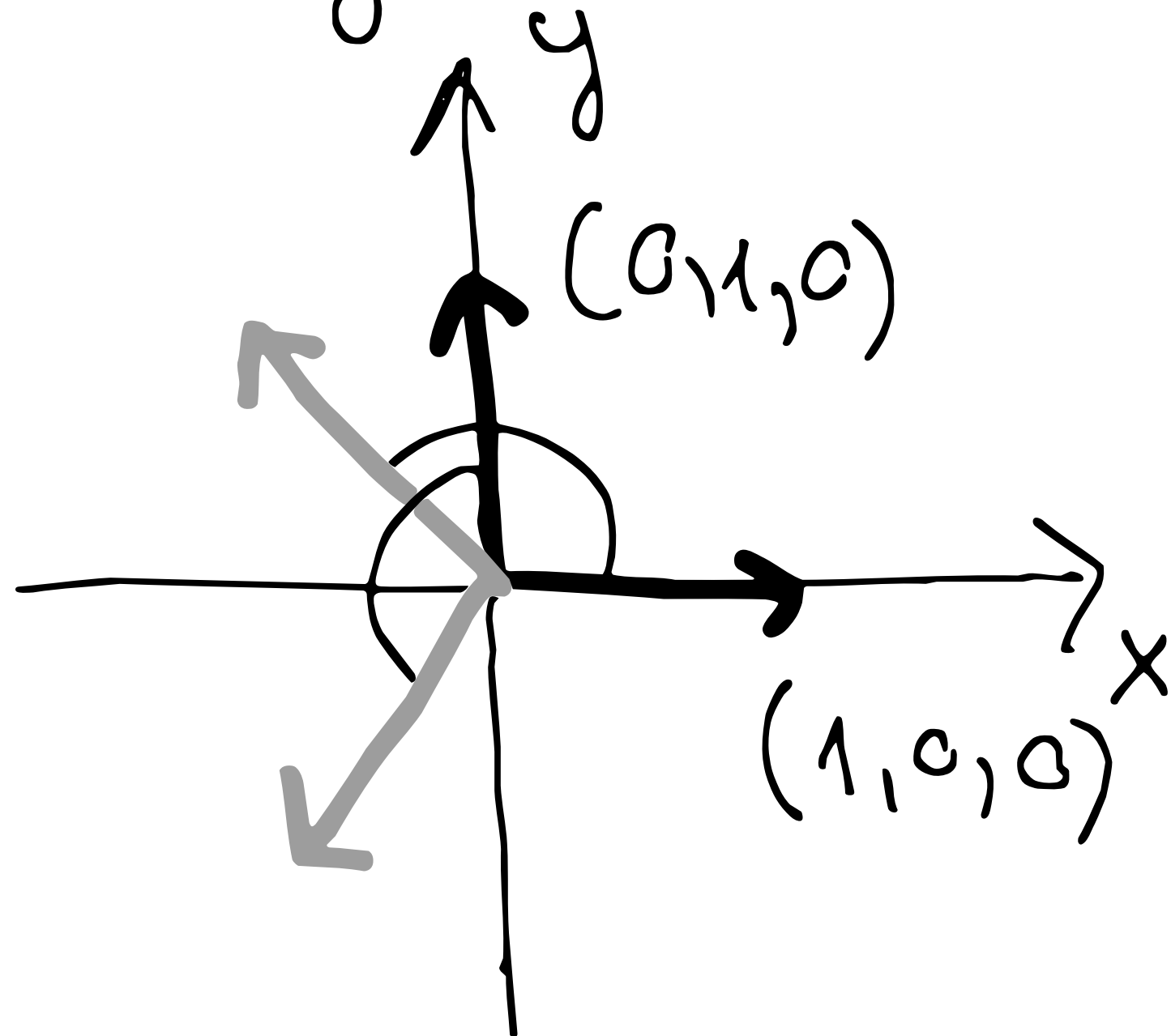
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

4.

a



Az xy síkban:



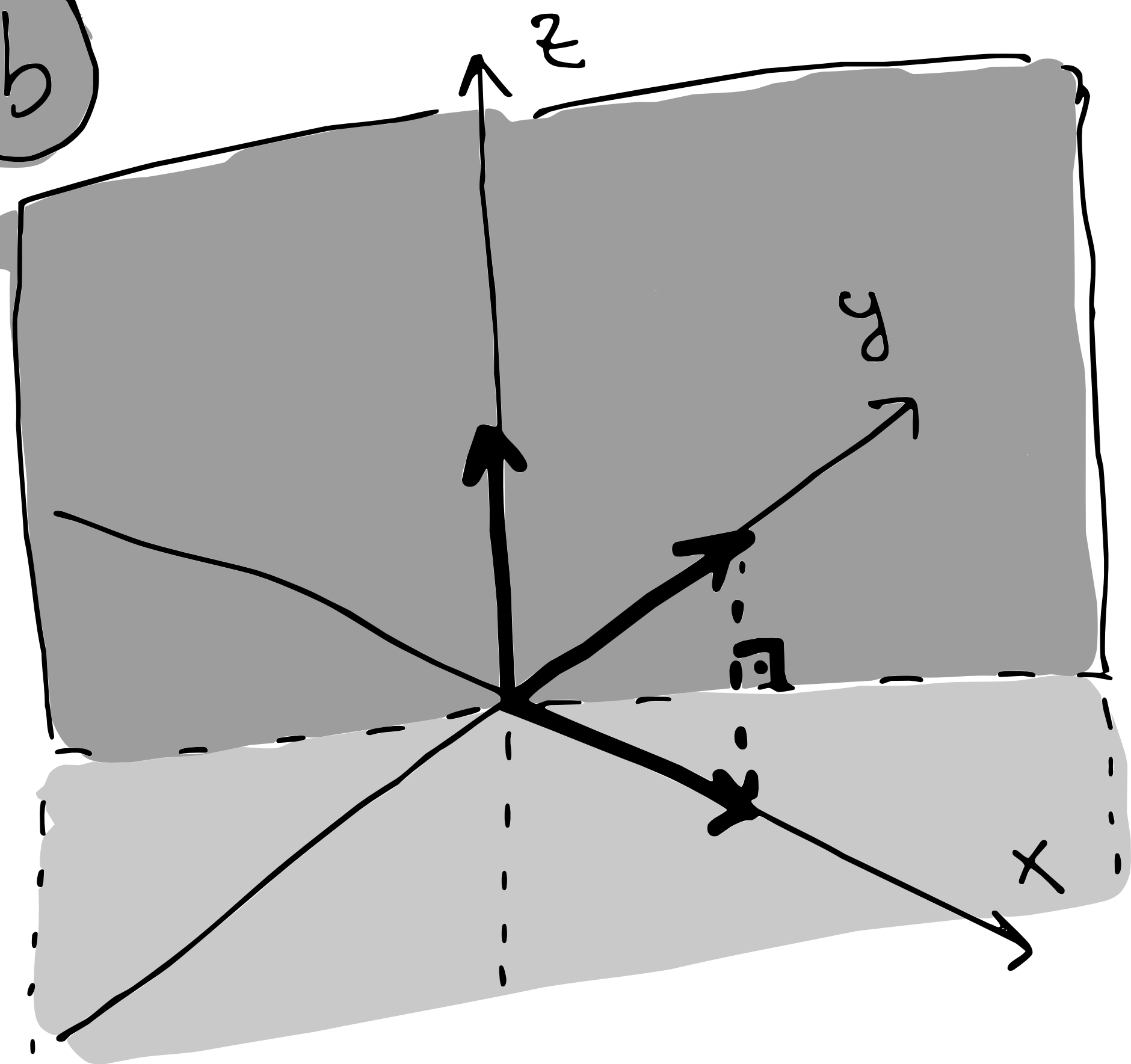
A síkban vett forgatás mintájára

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{A mátrix: } \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b



Látjuk, hogy
a z-tengely
helyén marad,
míg az x- és
y-tengelyek
egymáshoz mozdulnak.

A standard báziselemek helyei:

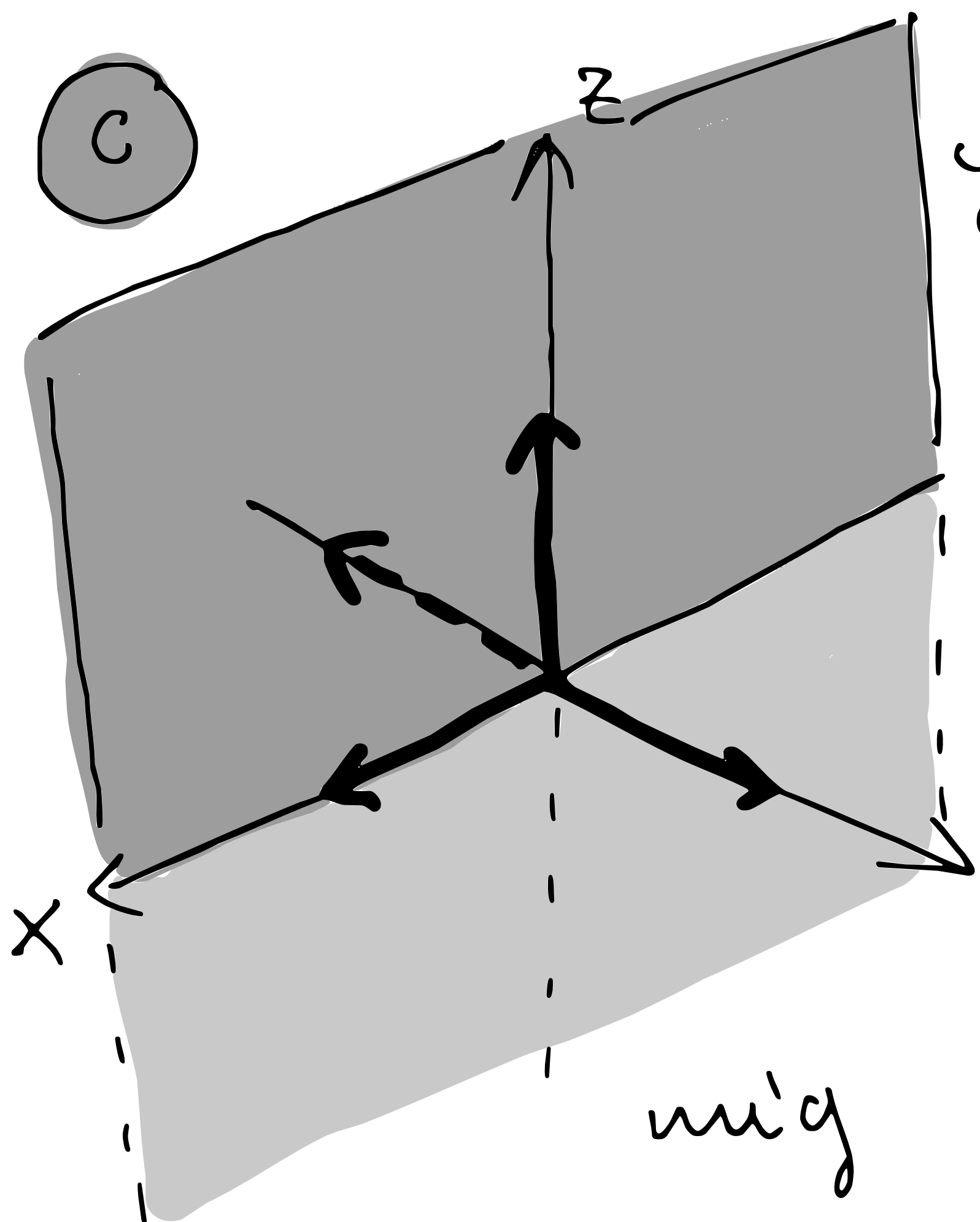
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A mátrix ehhez

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$y=0$ La l'heute, hoq

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

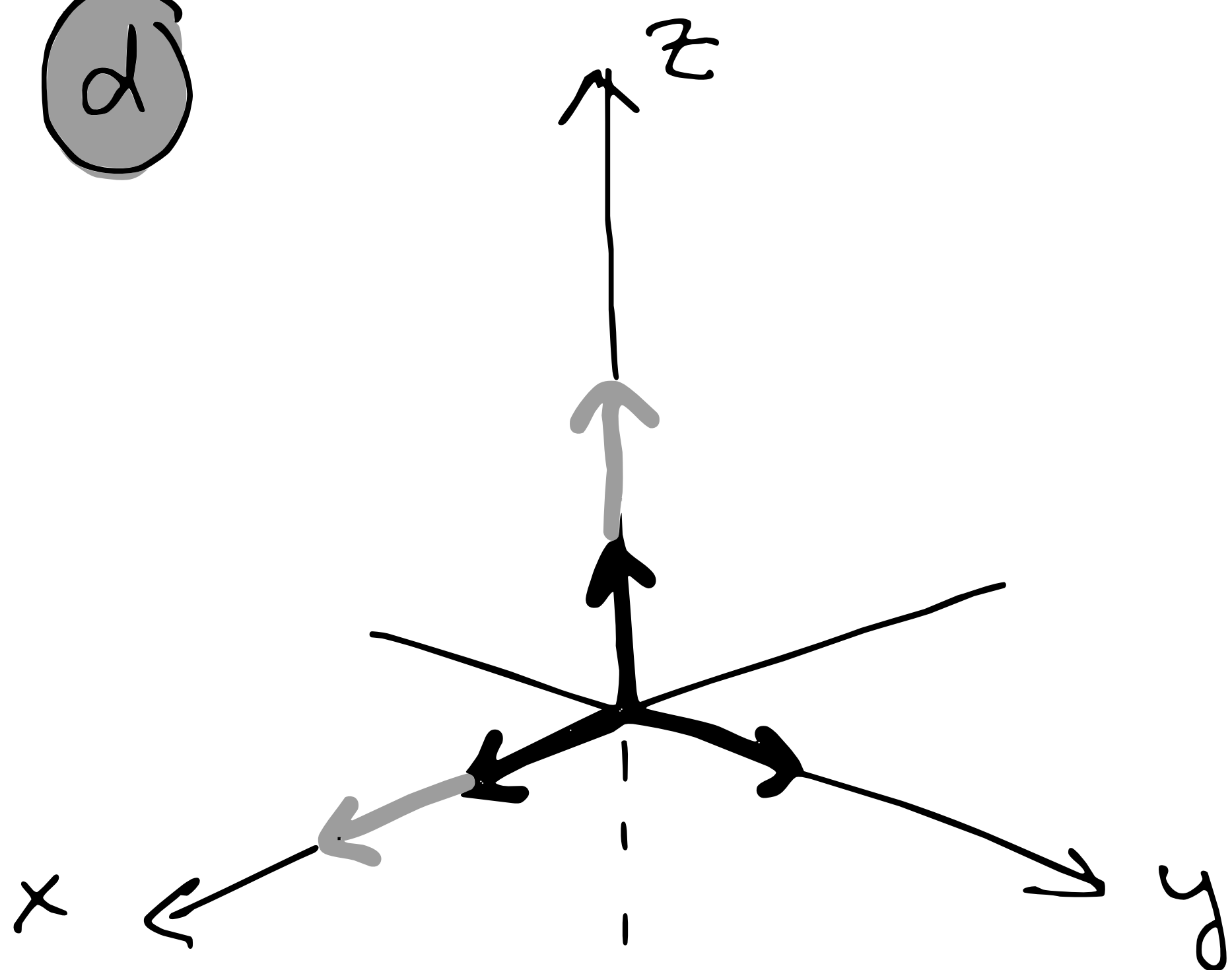
szegát megjelöl
menek át a tunc-
y fonalwé hatáscsa,

miq $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A matrix inner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d



A standard basis-
vektorok képei:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A mátrix ismer:

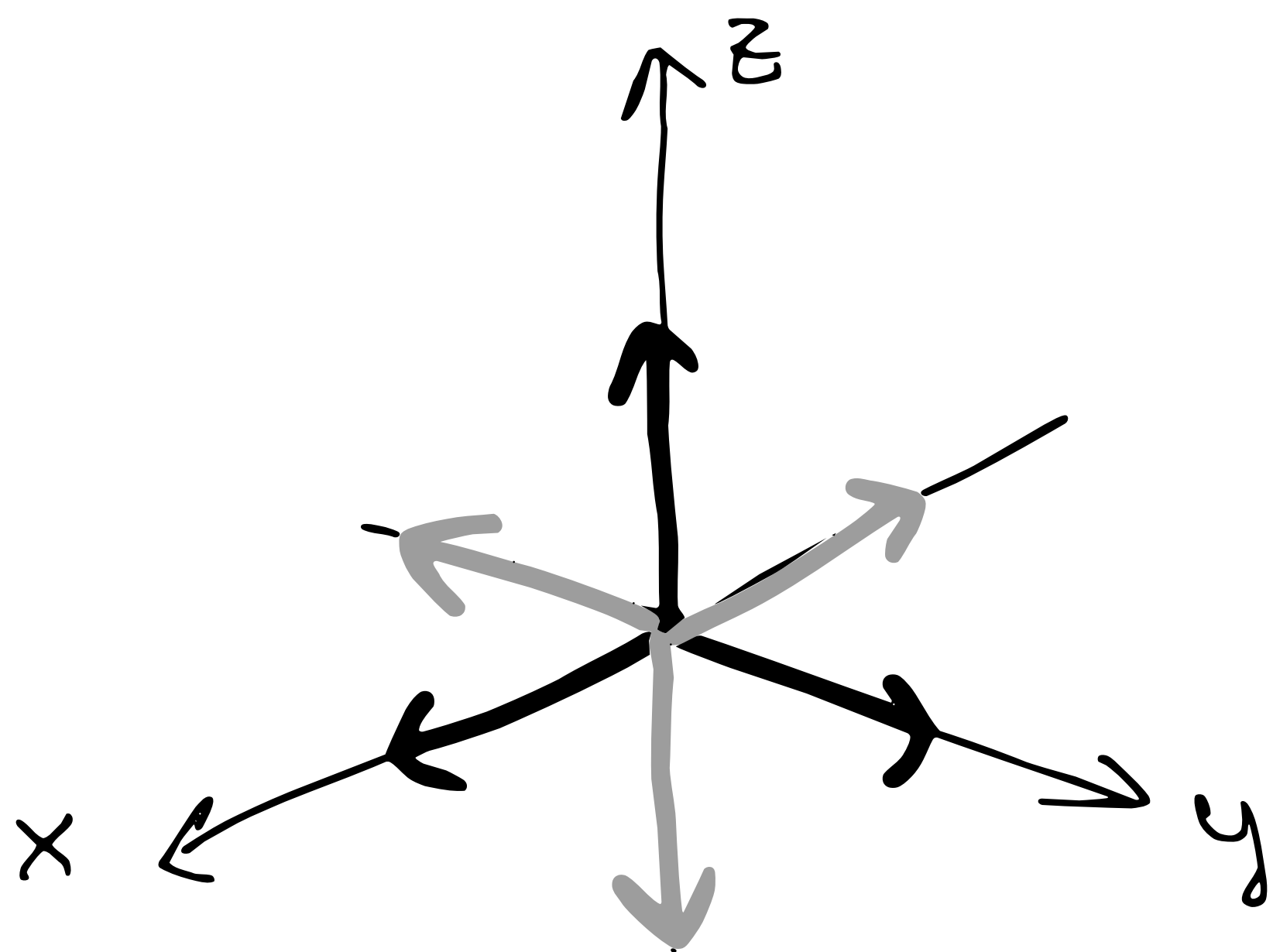
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

e

A forgatás mátrixa az x-tengely
körüli a kerélti eredmények
alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A hűrepentés tükrözés mátrixa:



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

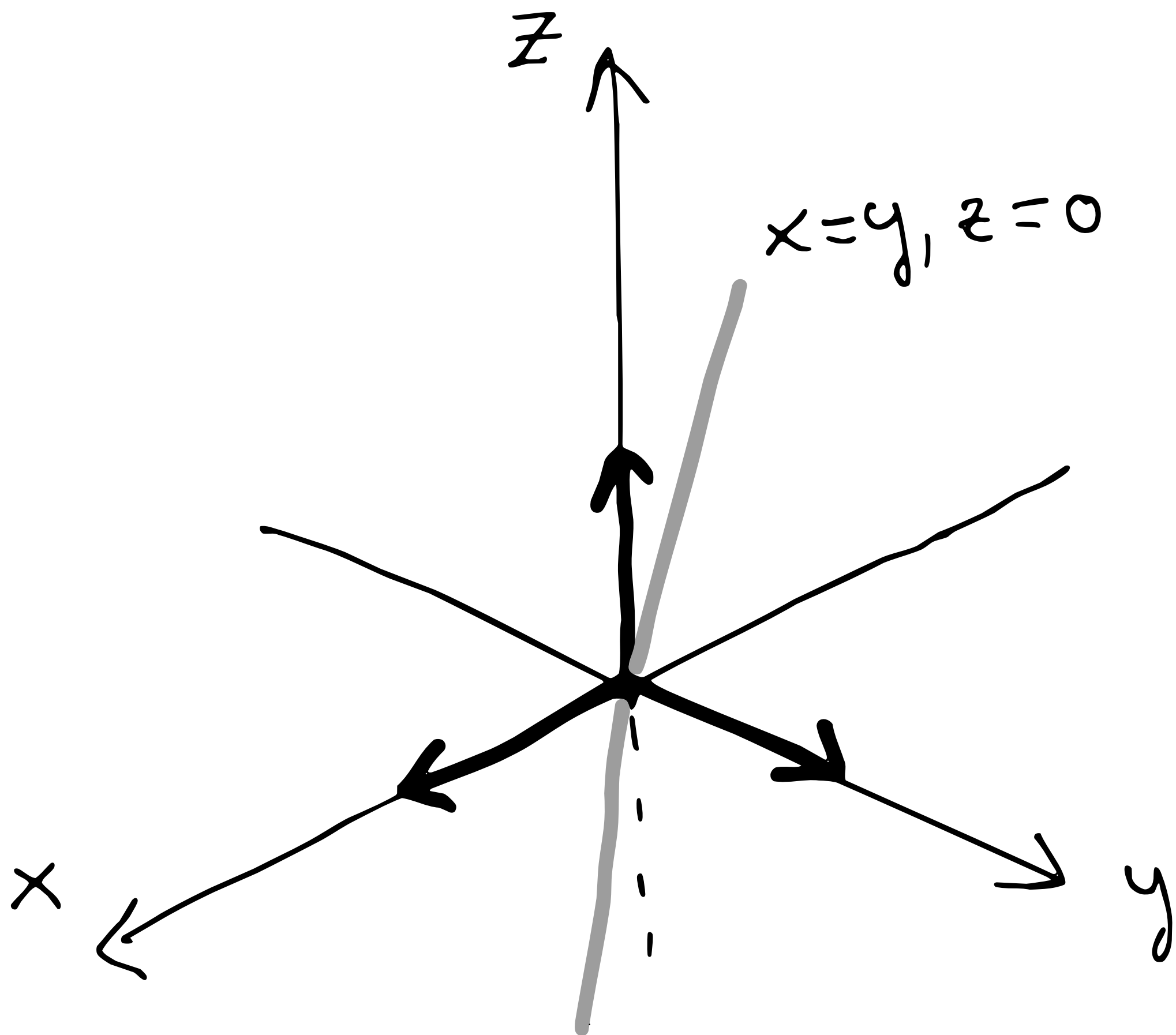
A hűtő megfelelő sűrűsben vett
hempentője:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix tehát:

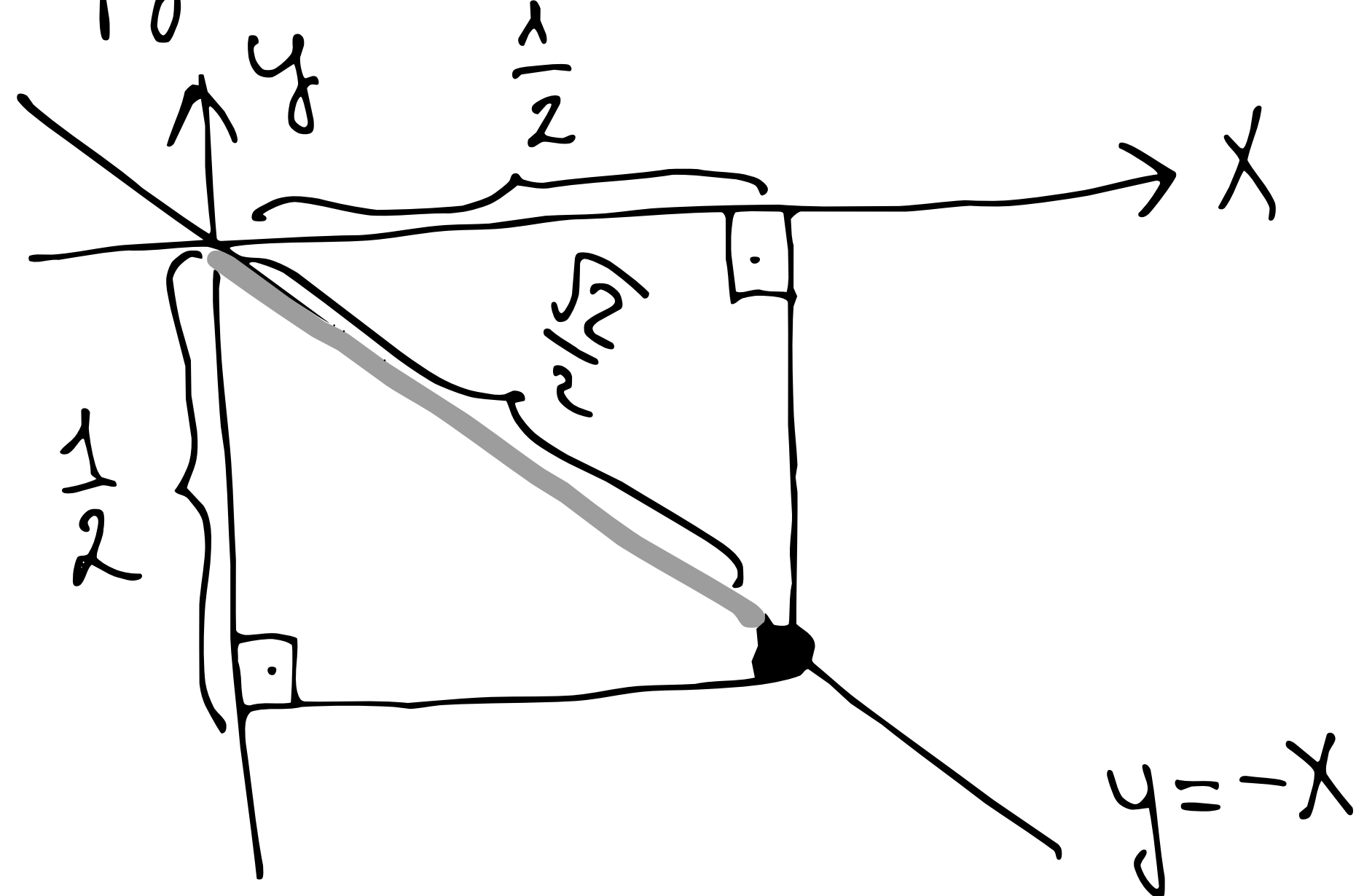
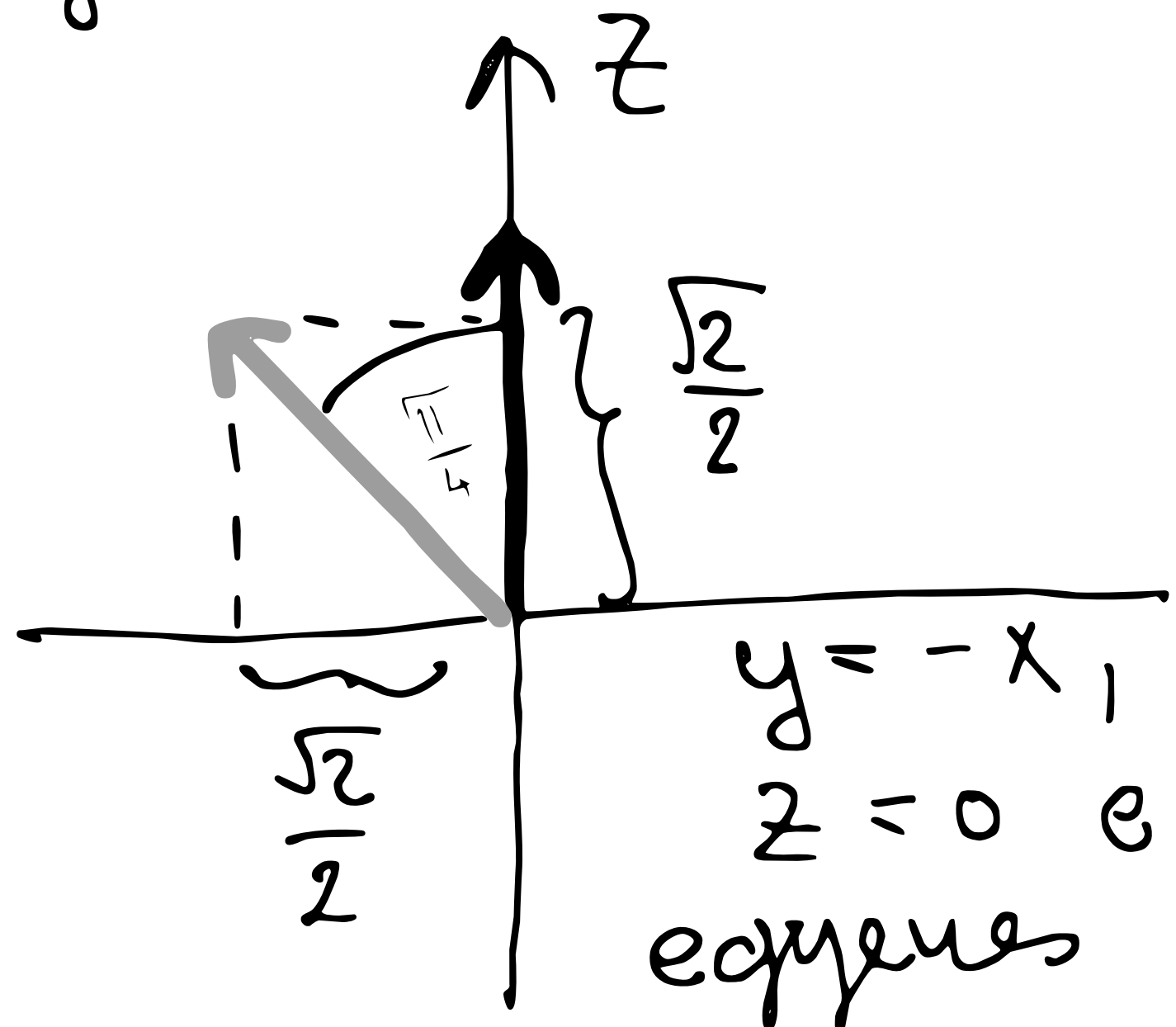
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

⊗ Az egyenes az xy síkban talál-
ható ($z=0$) miatt. Ez a hivatkozás
lehet:



Hamisítjuk ki, hogy a z -tengely
merőleges az egyenesre. Ellen az

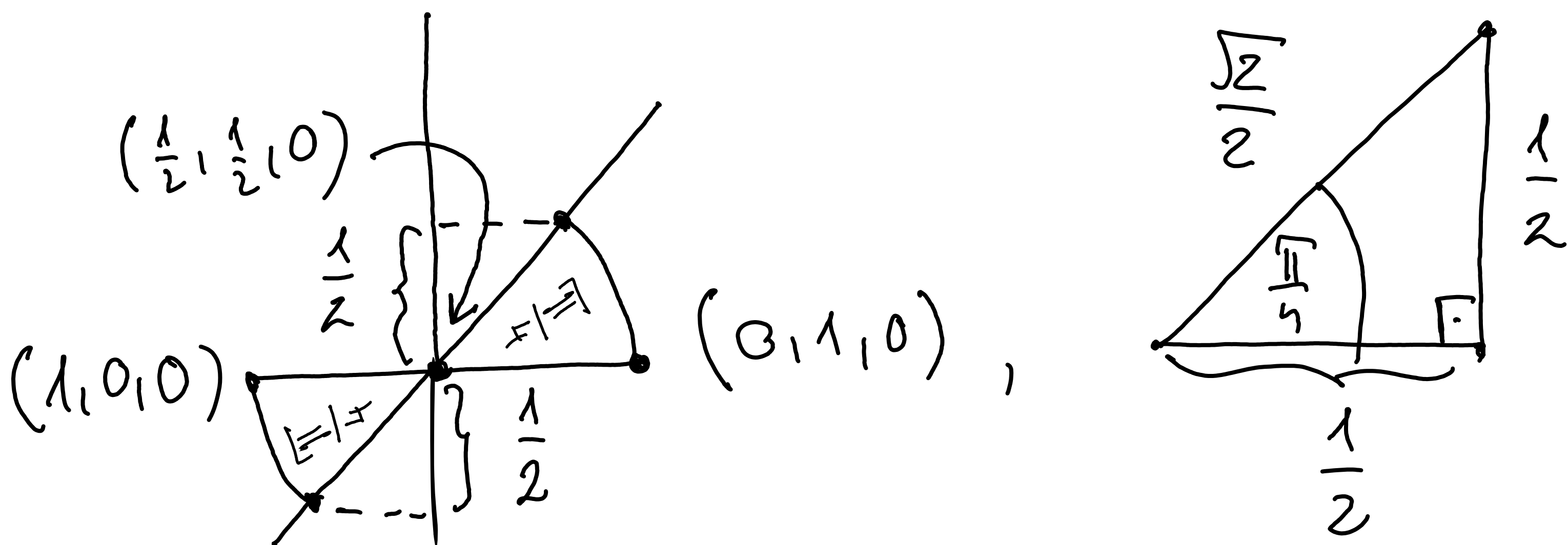
$y = -x$ síkban: } hogy a $z=0$ síkban:



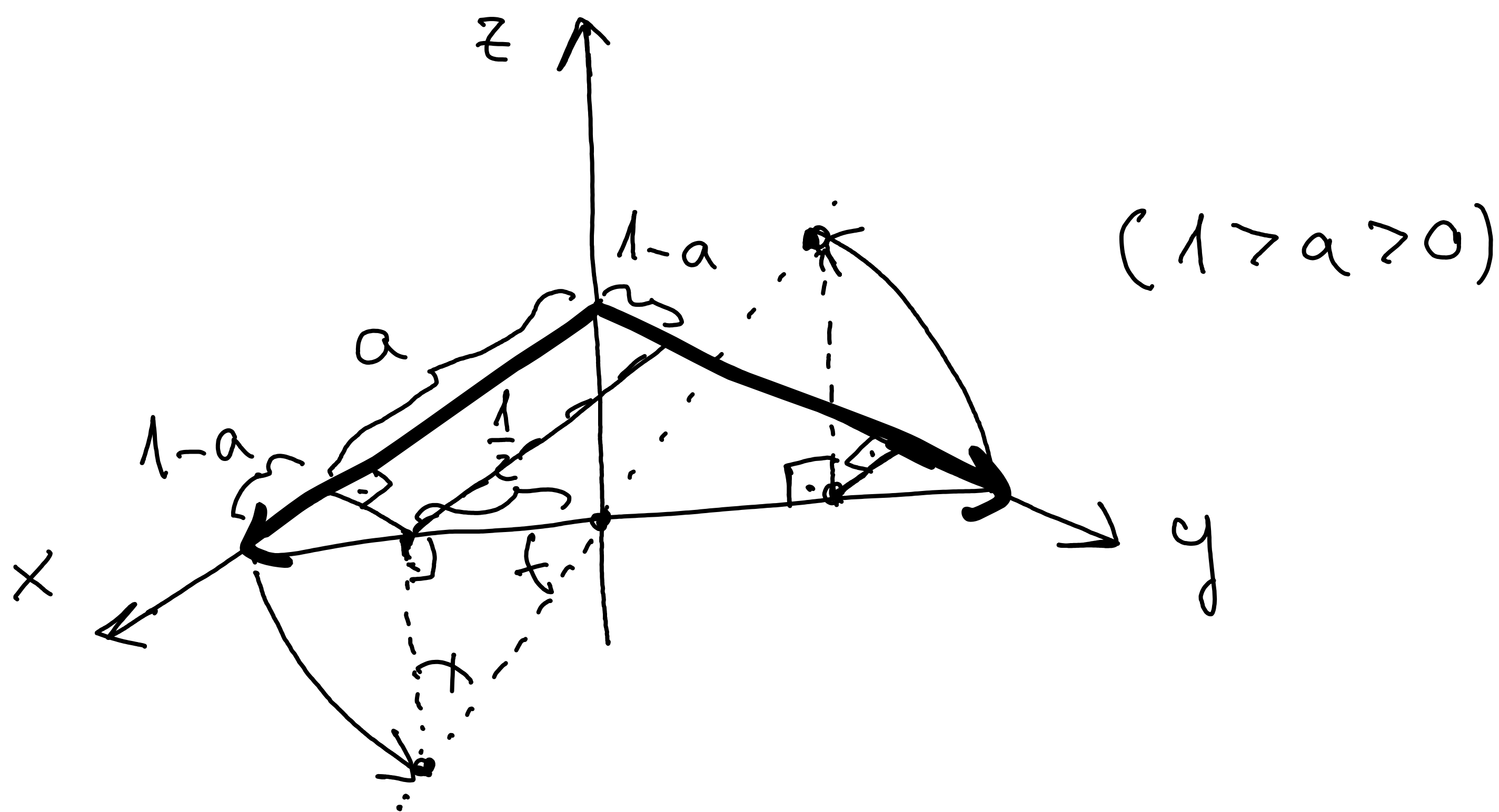
Árt kaptuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

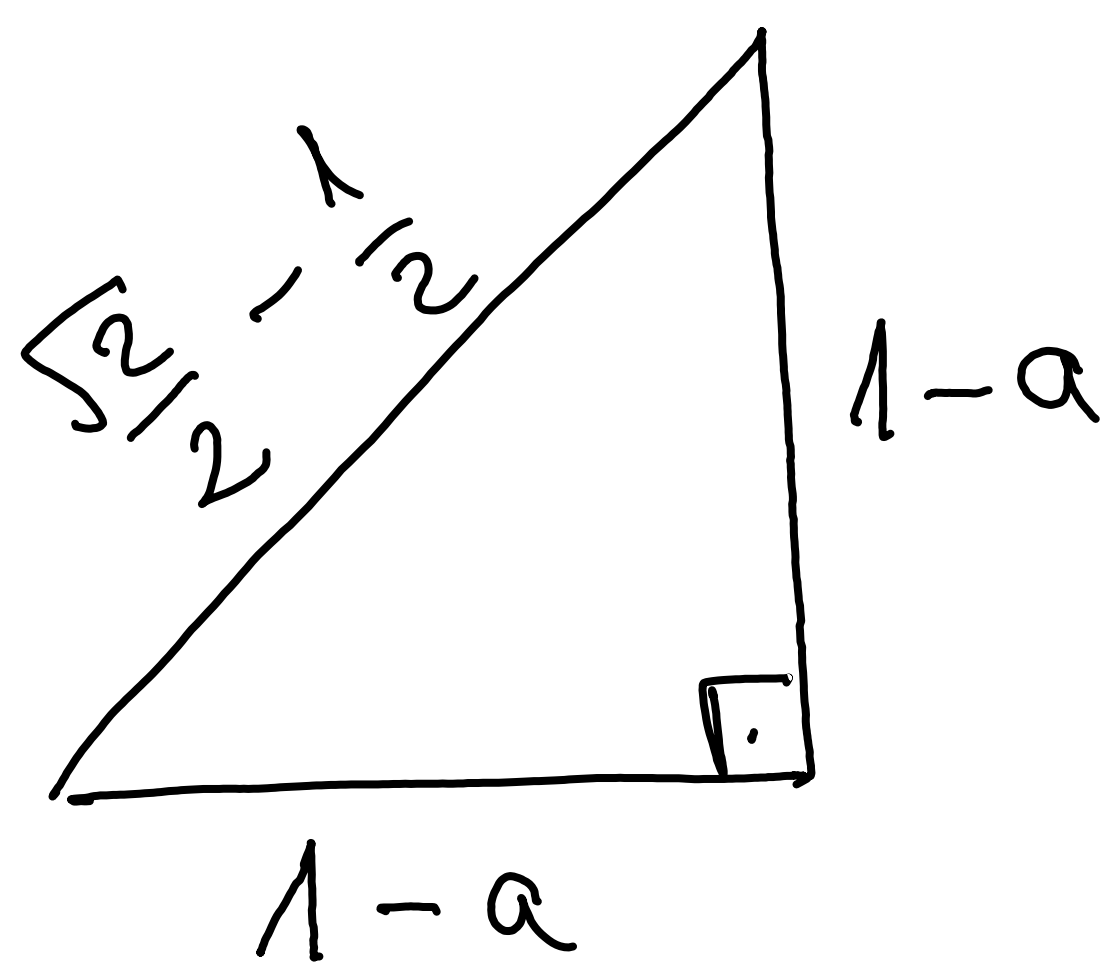
Most hozzájeh ki, hogy az egyenes
areus néget zér be az x - és y -tengely-
ekkel.



A z -koordináta $\frac{1}{2}$ len, már csak
az x és y koordinátákat kell
megtalálnunk.



A hővezetési egyenletet használva



$$2 \cdot (1-a)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$|a-1| = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Innen a lépések:

A matrix ehhez:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

g) Az eredmény a már korábban
hímanalt mátrixok megfelelő sorokkal
vett össze lett.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{A mátrix tehát}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

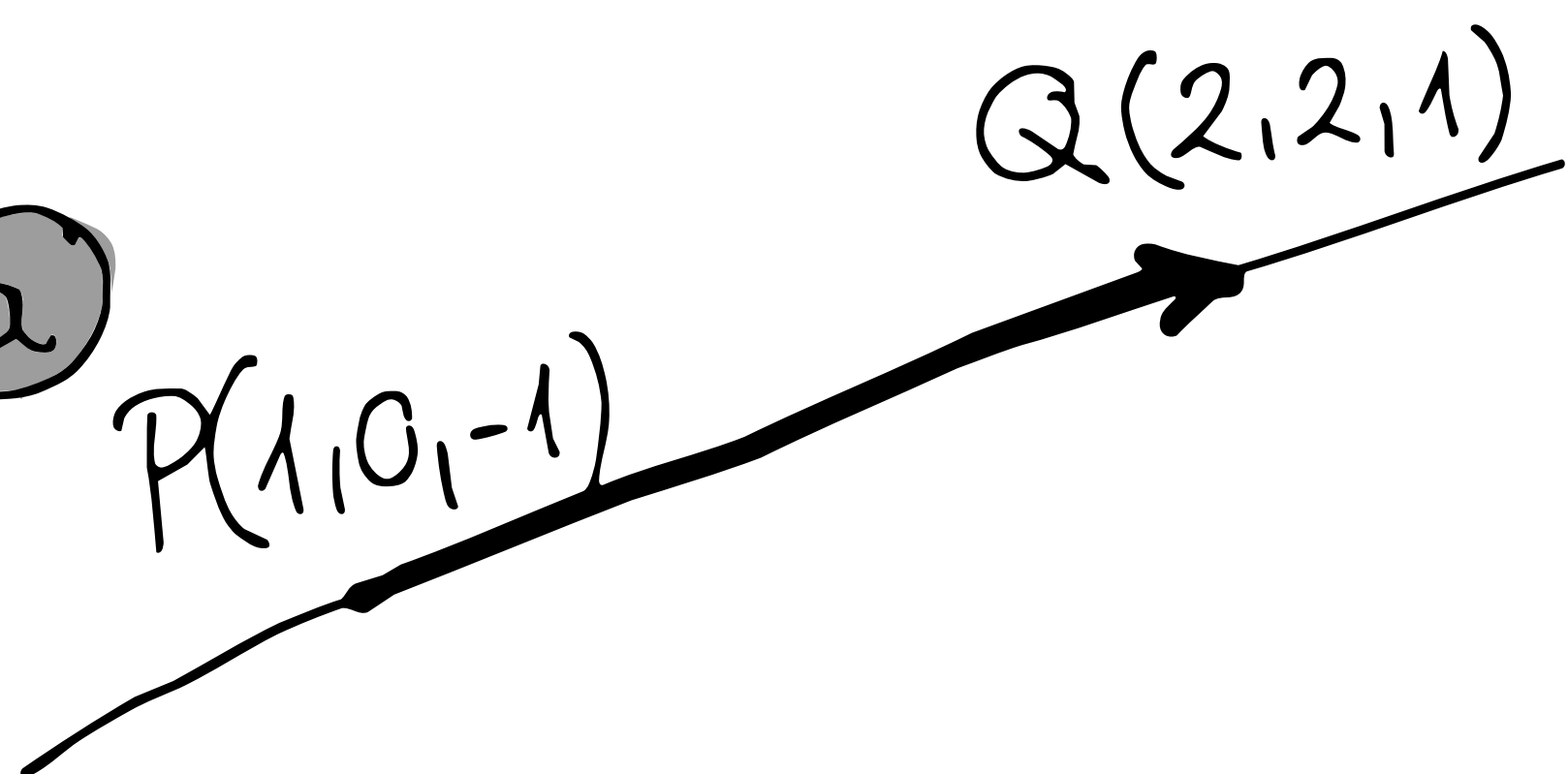
h) Hasonlóan a g) feladathoz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \text{A mátrix tehát:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.

a



Egy pont az egyenesen:

$$P(1, 0, -1).$$

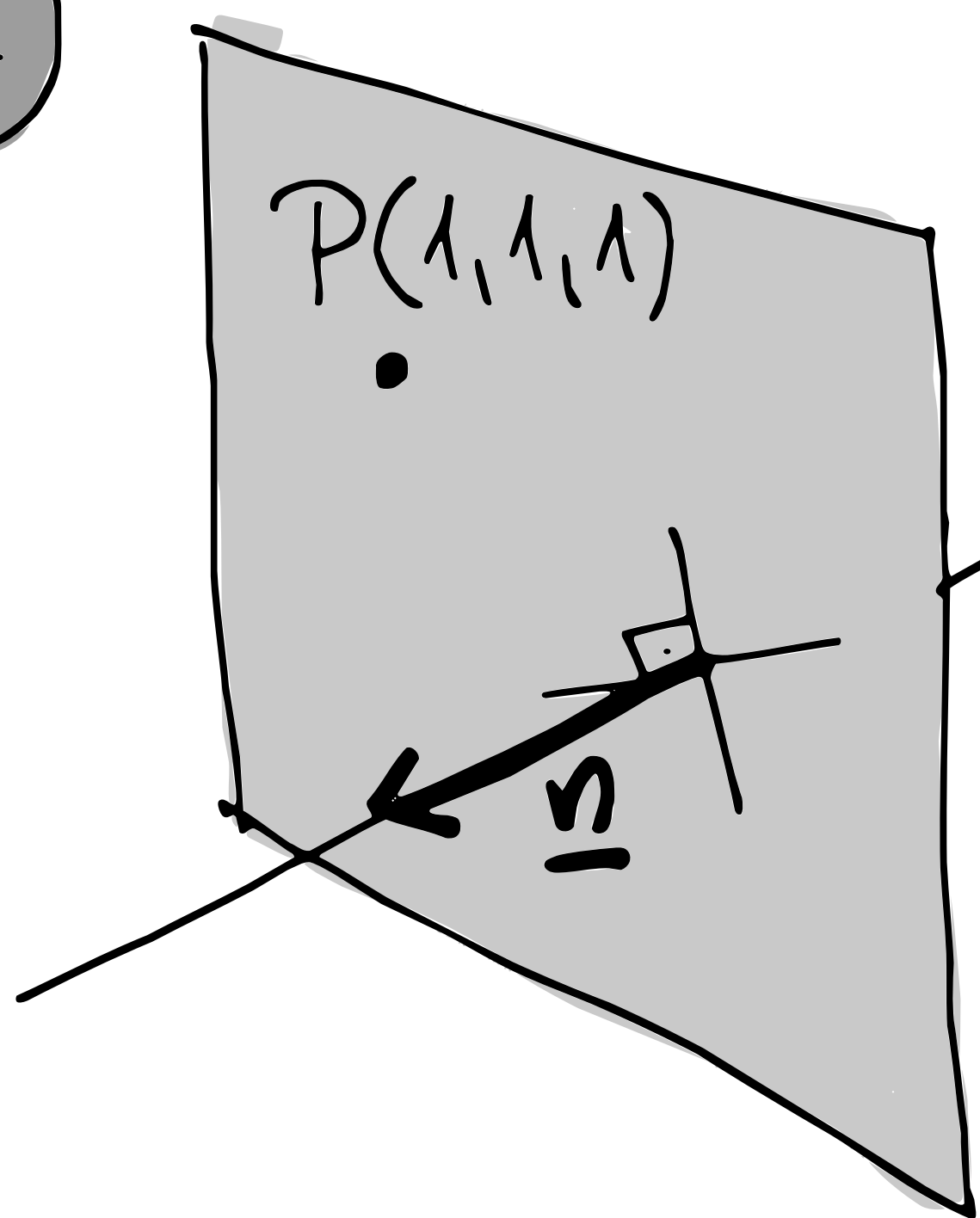
Az egyenes egy irányvektora:

$$\vec{PQ} (1, 2, 2)$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere
innen

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{array} \right\} (t \in \mathbb{R})$$

6



Egy pont a síkon:

$$P(1,1,1).$$

Mivel az egyenes merőleges a síkra, így az irányvektora normálvektor-

ra lesz a síknak, vagyis

$$x = 2t$$

$$y = 1 - t$$

$$z = 5 + 3t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 3t \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{n}(2, -1, 3)$$

A sík egyenlete innen

$$2x - y + 3z = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1$$

$$2x - y + 3z = 4$$