

1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ Kananáljuk a}$$

determináns definitívát 2×2 -es
mátrixoké:

$$\det(A) = (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-3) =$$

$$= -10 - (-9) = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Fektűk ki a determináns
a mátrix első sorát.

$$\det(B) = 3 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot [(-7) \cdot (-4) - 4 \cdot 1] + 2 \cdot [1 \cdot (-4) - 4 \cdot 7] =$$

$$= 3 \cdot [28 - 4] + 2 [(-4) - 28] =$$

$$= 3 \cdot 24 + 2 \cdot (-32) =$$

$$= 72 - 64 = 8.$$

$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Végül eléri sor-
műveleteket és hozzá lépés alá:

$$\begin{array}{ccc|c}
 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & -12 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} S_2 + 2S_1 \\ = \\ S_3 - \frac{3}{2}S_1 \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5/2 & -5 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} S_3 - \frac{5}{4}S_2 \\ = \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ sor szerint kifejtve}$$

minden tag nulla.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -7 & -14 & 7 \\ 9 & 18 & -9 \end{bmatrix} \text{ Fejtsük ki a determinánsot!}$$

néhányan úgy is mondhatják:

$$\det(D) = 2 \begin{vmatrix} -14 & 7 \\ 18 & -9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -7 & -14 \\ 9 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(126 - 126) - 4(63 - 63) - 2(-126 + 126) =$$

$$= 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

2. Egy mátrix pontosan akkor inverzálható, ha a determinánsa nem nulla. Ez alapján A és B inverzálhatók, míg C és D nem.

Számítsuk ki A^{-1} -et. Ehhez először határozzuk meg az adjungált mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \leadsto \begin{matrix} A_{11} = 5 & A_{12} = -3 \\ A_{21} = 3 & A_{22} = -2 \end{matrix},$$

amiből

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{innen } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) =$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük a megoldást:

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = AA^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}A.$$

Nálóban helyes volt a számításhoz.

Számítsuk ki hasonlóan B^{-1} -et.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \text{ és } \det(B) = 8$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 24 \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -32 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -19$$

$$\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & -8 & -8 \\ 32 & -12 & -12 \\ 50 & -17 & -19 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{adj}(B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3/2 & -3/2 \\ 25/4 & -17/8 & -19/8 \end{bmatrix}.$$

3.

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot (-4) - j \cdot 4 + k \cdot (-2) =$$

$$= -4i - 4j - 2k,$$

was ist das Ergebnis, hoch

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Es ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht, die durch die Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$ aufgespannt wird.

① Mennyőleges $\underline{u}$ -ra és $\underline{v}$ -re is:

$$\langle \underline{u} | \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) = 0$$

$$\langle \underline{v} | \underline{u} \times \underline{v} \rangle = 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) = 0$$

② A hossza az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által feszített paralelogramma területe.

$$\| \underline{u} \times \underline{v} \| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Most számítsuk ki a területet:

$$\| \underline{u} \| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\| \underline{v} \| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$\langle \underline{u} | \underline{v} \rangle = 2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 30$$

$$\cos(\angle(\underline{u}, \underline{v})) = \frac{30}{6 \cdot \sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin(\angle(\underline{u}, \underline{v})) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\text{Terület: } \| \underline{u} \| \cdot \| \underline{v} \| \sin(\angle(\underline{u}, \underline{v})) = 6.$$

$$\underline{u} \ \underline{w} \ \underline{v} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \text{Fejtsük ki a második sor mentén}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

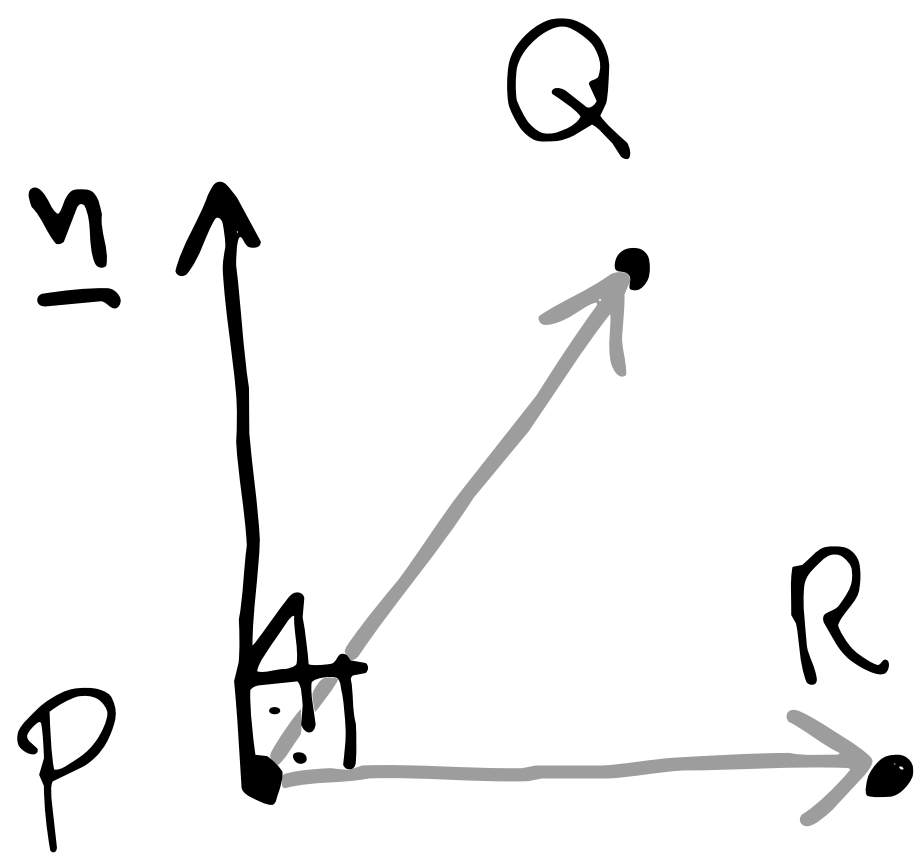
$$= -(-4) + 0 + 5 \cdot (-2) =$$

$$= 4 - 10 = -6$$

A geometriai jelentés: $\underline{u} \ \underline{w} \ \underline{v}$ a három vektor által definiált paralelepipedon előjeles térfogata.

(Itt a térfogat 6 lenne, csak a három vektor ebben a sorrendben nem alkot jobbrándsági rendment, ezért negatív előjelet kap.)

4.



Mivel P, Q, R pontok a síkban vannak, így $\vec{PR}$ és $\vec{PQ}$ vektorek is a síkban vannak.

A sík $\underline{n}$ normálvektora mindig leghalmozhat, ezért

a $\vec{PR}$ és $\vec{PQ}$ vektorok vektoriális menata $\vec{n}$ választás normálvektora:

$$\underline{n} = \vec{PR} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_2 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{-4} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{-2}$

$= 2i + 4j - 2k$, ezért $\underline{n} = (2, 4, -2)$,
amiél $P(0, 1, 2)$ miatt az egyenlet:

$$2x + 4y - 2z = 0.$$

AT(1, 1, -1) pont előjeles távolsága a síhtől
a képlet alapján

$$\frac{2(1-0) + 4(1-0) - 2(-1-0)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$$

A sík egyenlete: $2x + 4y - 2z = 0$

Az egyenes egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 3 + t \end{aligned} \right\}$$

A közös pontok

$$2(2 + 2t) + 4(1 - t) - 2(3 + t) = 0$$

$$2 - 2t = 0$$

$$t = 1,$$

vagyis mérnök és a mérőpont

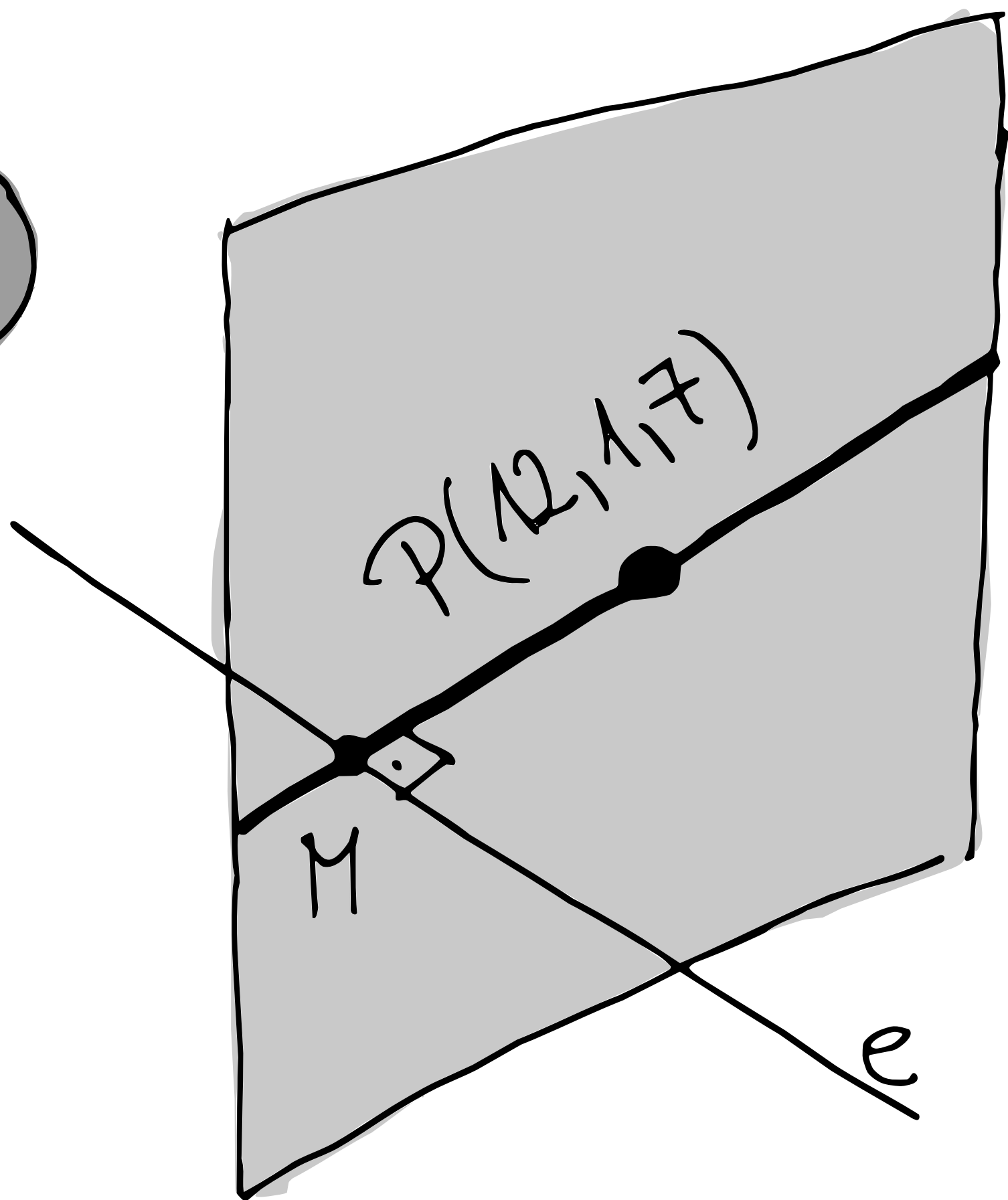
$$x = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$y = 1 - 1 = 0$$

$$z = 3 + 1 = 4$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 0 \\ z &= 4 \end{aligned} \right\} M(4, 0, 4).$$

5.



Az e egyenes
egyenletrendsere:

$$\left. \begin{aligned} x &= 3+t \\ y &= 2+3t \\ z &= -1-4t \end{aligned} \right\}$$

Keressük meg a sík, ami átmeny a P ponton és merőleges az e egyenesre. Ebben a síkban lesz a keresett egyenes. A sík normálvektora az e egyenes irányvektora lesz, vagyis

$$\underline{n} (1, 3, -4), \quad 12+3-28$$

amiből a sík egyenlete $15-28=-13$

$$x+3y-4z=-13.$$

Az e egyenes es a sík metséspontja

$$(3+t)+3(2+3t)-4(-1-4t)=-13$$

$$26t+13=-13$$

$$t=-1$$

A metséspont tehát

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 + (-1) = 2 \\ y &= 2 + 3(-1) = -1 \\ z &= -1 - 4(-1) = 3 \end{aligned} \right\} M(2, -1, 3)$$

A keresett egyenes áthalad az M ponton,
így az irányvektora

$$\vec{MP}(10, 2, 4).$$

Az egyenes egyenletrendszere innen

$$\left. \begin{aligned} x &= 12 + 10t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 7 + 4t \end{aligned} \right\} (t \in \mathbb{R})$$

6.

a) Keressük meg azokat a pontokat, amelyek mindeket sík egyenletét kielégítik:

$$\begin{cases} x + 5y + z = 2 \\ 2x + 11y + 5z = 3 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 11 & 5 & 3 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -14 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - 14z = 7 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \text{ A } z \text{ onlopában}$$

nincsen bekezdés, így

valószínűleg paraméter lesz: $z = t$. A feltéti
váltás után: $x = 7 + 14t$, $y = -1 - 3t$.

A megoldás, ami éppen a keresett egyenes
egyenlete:

$$\begin{cases} x = 7 + 14t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{b} \begin{cases} 3x - y - z = 7 \\ 6x - 2y - 2z = 9 \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & | & 7 \\ 6 & -2 & -2 & | & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{bmatrix} \text{ Önellentmondásért}$$

nincsen megoldás az egyenletrendszer.

A síkhoz képest kitérőek.

Ezt láthatjuk volna a normálvektorokból is hiszen párhuzamosak:

$$\underline{n}_1(3, -1, -1) \text{ és } \underline{n}_2(6, -2, -2),$$

$$\underline{n}_1 \parallel \underline{n}_2$$

7.

a

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -1 + 4s \\ z = 1 \end{cases}$$

keressünk metszéspontot. Amennyiben P
mindkét egyenes rajta van, akkor a
megfelelő koordináták egyenlők:

$$\begin{cases} x: 1 = 1 + 2s \\ y: 3 - 4t = -1 + 4s \\ z: -1 + 2t = 1 \end{cases} \quad ,$$

amiből az alábbi lineáris egyenlet-
rendszert kapjuk.

$$\begin{cases} 2s = 0 \\ -4t + 4s = -4 \\ 2t = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases}$$

A metszéspont tehát:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 4 \cdot 1 = -1 \\ z = -1 + 2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \quad M(1, -1, 1)$$

6

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = 3 + 2s \\ z = -5 - 4s \end{cases}$$

Meressünk metszpontot:

$$\begin{cases} 1 + t = 5 - 2s \\ 1 - t = 3 + 2s \\ 2t = -5 - 4s \end{cases} \quad \begin{cases} t + 2s = 4 \\ -t - 2s = 2 \\ 2t - 4s = 5 \end{cases}$$

A feltételek hárát ellentmondás van
(Gauss eliminációval 3 ellentmondás sort
fogunk kapni), így nincs metszpont.

Döntsük el, hogy párhuzamos vagy hitezők.

Az irányvektorok:

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 2) \quad \text{és} \quad \underline{v}_2 = (-2, 2, -4),$$

és látható, hogy $\underline{v}_2 = -2 \cdot \underline{v}_1$, vagyis

$\underline{v}_1 \parallel \underline{v}_2$, így párhuzamos az egyenesek.

©

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3-s \\ y = 3 \\ z = 1-s \end{cases}$$

Interessáns metszéspontok:

$$\begin{cases} 1-t = 3-s \\ t = 3 \\ 1+t = 1-s \end{cases} \quad \begin{cases} -t + s = 2 \\ t = 3 \\ t + s = 0 \end{cases}$$

Ellentmondásosnak jutunk, így nincs metszéspont.

Az irányvektorok: $\underline{v}_1(-1, 1, 1)$ és $\underline{v}_2(-1, 0, -1)$.

Látható, hogy nem párhuzamosak, így biztosan vannak az egyenesek.