

1.

a) $a_n = (-1)^n$.

A sorozat korlátos lenne, hiszen

$-1 \leq a_n \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
teljesül.

A sorozat nem monoton, hiszen

$$a_1 < a_2 > a_3.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = 1 \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = -1,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1.$$

A -1 és 1 torlódási pontok lennének
(több nem is lenne). Mivel két különböző
torlódási pontja van nem konvergens.

⑥ $b_n = 3 - n^2$

A sorozat felülről korlátos, hiszen

$$3 \geq 3 - n^2 = b_n.$$

Alulról azonban nem korlátos, hiszen
 bármilyen $k \in \mathbb{R}$ alsó korlát lenne

$k \leq 3 - n^2$, amiért $n^2 \leq k - 3 -$
 valamilyen $n \in \mathbb{N}$ -re teljesülne,
 ami lehetetlen.

A sorozat monoton csökkenő hiszen

$$n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -n^2 > -(n+1)^2 \Rightarrow 3 - n^2 > 3 - (n+1)^2,$$

vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n > b_{n+1}$.

(A monotonitás számlálási művelet is.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - n^2 = -\infty,$$

a sorozat divergens.

© $c_n = 1 - \frac{1}{n}$

A sorozat határcs kimen $0 \leq a_n \leq 1$.

A sorozat monoton mehető $n \in \mathbb{N}$:

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

A fenti két tulajdonság alapján már adódik, hogy konvergens len. A határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{n} \right) \xrightarrow{0} = 1 - 0 = 1$$

Mivel konvergens, így csak egy lehetséges pontja van és az megegyezik a határértékével, vagyis 1 len.

2.

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n - 2}{4n^2 + 10n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{n} - 2 \cdot \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 + 10 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right)}{4 + 10 \cdot \left(\frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{4 + 10 \cdot 0 - 0} = \frac{3}{4}$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^2 - n}{2n^2 - 7n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{2 \cdot \frac{1}{n} - 7 + \frac{1}{n^3}} = -\infty$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 3}{n^7 + 10n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{n^5}}{1 + 10 \cdot \frac{1}{n^6}} = 0 \cdot 1 = 0$$

3.

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2 \cdot 3^n}{4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \right)}{4^n \left(1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \rightarrow 0}{1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \rightarrow 0} = 0 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0}{1 + 1 \cdot 0} = 0$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 3^{2n}}{9^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 9^n}{9 \cdot 9^n - 2^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{5}{9} \right)^n - 1 \right)}{9^n \left(9 - \left(\frac{2}{9} \right)^n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{5}{9} \right)^n - 1}{9 - \left(\frac{2}{9} \right)^n} =$$

$$= \frac{3 \cdot 0 - 1}{9 - 0} = -\frac{1}{9}$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n - 3}{6^n + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{6} \right)^n \frac{1 - 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 + 9 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n} = 0$$

4.

a) A_2 előbbi egyenlőtlenség teljesül $n \geq 1$ esetén
 a számlálót növeljük

$$\circ \leq \frac{\sqrt{4n+1}}{2n-1} \leq \frac{\sqrt{4n+n}}{2n-n} = \frac{\sqrt{5n}}{n} = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

a nevezőt csökkentjük

$\downarrow$
0

ezért a rendőrelv alapján teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{2n-1} = 0.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - \sqrt{n} + n^5}{\sqrt{2n+1} + 2^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n - \frac{\sqrt{n}}{5^n} + \frac{n^5}{5^n}}{\frac{\sqrt{2n+1}}{8^n} + 1}$$

$\uparrow 0$ $\uparrow 0$ $\uparrow 0$
 $\downarrow 0$

$$= 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

(Itt kihasználtuk, hogy $\sqrt{n} \ll 5^n$, $n^5 \ll 5^n$,
 továbbá $\sqrt{2n+1} \ll 8^n$.)

c) Szannia'lyuk hi, legeg - $1 \leq \cos(7^n + n^2) \leq 1$:

$$\underbrace{\left(\frac{-1}{\sqrt{n}} \right)}_{\downarrow 0} \leq \frac{\cos(7^n + n^2)}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{\downarrow 0},$$

ezért a szandorek miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(7^n + n^2)}{\sqrt{n}} = 0.$$

5.

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)+4}{n-1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n-1} \right)^n = e^4, \text{ mivel}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n-1} \cdot n = 4.$$

b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-2}{3n+1} \right)^n = +\infty, \text{ hiszen } \frac{4}{3} > 1, \text{ hiszen amennyiben}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ akkor}$$

$$\bullet a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = +\infty$$

$$\bullet |a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 0$$

$$\bullet a < -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n \text{ nem létezik}$$

c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 - 1) + 4}{n^2 - 1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2 - 1} \right)^n = e^0 = 1, \text{ mivel}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2 - 1} \cdot n = 0.$$

d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1} \right)^{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 - 1) + 4}{n^2 - 1} \right)^{n^2 + 2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2 - 1} \right)^{n^2 + 2n} = e^4, \text{ mivel}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2 - 1} \cdot (n^2 + 2n) = 4.$$

6. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$

$$\varepsilon > \left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 + 1}{2(2n^2+1)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4n^2+2} \right| = \frac{1}{4n^2+2},$$

vagyis kell $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \geq n$ esetén

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n^2+2} < \varepsilon$$

$$4n^2+2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n^2 > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

mivel $\varepsilon = \frac{1}{10000}$, így

$$n^2 > 2500 - \frac{1}{2}$$

$$n > \sqrt{2500 - \frac{1}{2}} \approx 49.9$$

vagyis például $N = 50$ jó választás.

6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n-3}{2n+1} = 4$$

$$\begin{aligned} \varepsilon > |b_n - 4| &= \left| \frac{8n-3}{2n+1} - 4 \right| = \left| \frac{8n-3-4(2n+1)}{2n+1} \right| = \\ &= \left| \frac{-7}{2n+1} \right| = \frac{|-7|}{|2n+1|} = \frac{7}{2n+1} \end{aligned}$$

Vagyis

$$\frac{7}{2n+1} < \frac{1}{10000}$$

$$70000 < 2n+1$$

$$n > \frac{69999}{2} \approx 34999.5,$$

vagyis $N = 35000$ jó választás.

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\epsilon > |c_n - 1| = |\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1| =$$

$$= \left| \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} - 1 \right| = \left| \frac{2n - \sqrt{n^2 + 2n} - n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right| =$$

$$= \left| \frac{n - \sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right| = \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n},$$

$$\text{since } \sqrt{n^2 + 2n} > \sqrt{n^2} = n.$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{\sqrt{n^2+2n}+n} < \varepsilon$$

$$\sqrt{n^2+2n}-n < \varepsilon(\sqrt{n^2+2n}+n)$$

$$(1-\varepsilon)\sqrt{n^2+2n} < (1+\varepsilon)n$$

$$(1-\varepsilon)^2(n^2+2n) < (1+\varepsilon)^2 n^2$$

$$0 < 4\varepsilon n^2 - 2(1-\varepsilon)^2 n$$

$$0 < n(4\varepsilon n - 2(1-\varepsilon)^2),$$

amiböl

$$n > \frac{2(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$$

$$n > \frac{\left(1 - \frac{1}{10000}\right)^2}{\frac{2}{10000}} \approx 4999.00005,$$

amiböl $N = 5000$ ja választán.