

6. Gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x^2 - 3x - 4}$$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 + x^2}}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 + x^2}}{x^3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 + x^2}}{x^4}$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$$

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} \right)^{2x-3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+2\sqrt{x}}$$

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\pi^2}{6}} - 1}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^{2x} - 1}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\pi}(1+x) - 1}{x}$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi függvények folytonosak-e az értelmezési tartományukon.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10 \ln(10)} + 1 & \text{ha } x \leq 1 \\ \log_{10}(10x) & \text{ha } 1 < x \leq 100 \\ \frac{x-100}{100 \ln(10)} + 3 & \text{ha } 100 < x \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sqrt{1+x} & \text{ha } 0 < x \leq 3 \\ 2 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

7. Határozzuk meg, hogy az a, b, c valós paraméterek mely értékeire lesznek az alábbi függvények folytonosak a teljes értelmezési tartományukon.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} a - 2x^2 & \text{ha } x \leq 0 \\ 2^{-x} & \text{ha } 0 < x \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} b \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x} & \text{ha } x \leq -1 \\ x \cdot \arctan(x) & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\tan(cx-c)}{x-1} & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$