

1.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{1^2 - 4}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

hiszen $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ polinomok hányadosa,

ami felbontható, így felírható le az értelmezési tartományán, amihez az 1 nem tartozik.

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4, \text{ hiszen } x \mapsto x + 2 \text{ folytonos}$$

figyelem a 2 helyen

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{3 - 1}{3 + 2} = \frac{2}{5}.$$

$$\textcircled{d} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)^2}{(x-4)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)}{x+1} = \frac{4(4-4)}{4+1} = 0.$$

Megjegyzés:

A korábbi feladatokban látni láttuk azt a ténylet, hogy ismerjük egy $x^2 + bx + c$ alakú polinom gyökei α_1 és α_2 valószínűleg, akkor $x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.

Egy példa a $\textcircled{c}$ részben megadott polinommal

$$x^2 - 4x + 3 \text{ gyökei } \alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1,$$

vagyis $\alpha_1 = 1$ és $\alpha_2 = 3$, így

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

2.

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4+x^2}}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4+x^2}}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x^2) - (4+x^2)}{x^2(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4-0} + \sqrt{4+0}} = \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}$$

b) Az előző eredmény alapján:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4+x^2}}{x^3} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{-2}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}} \right) = +\infty$$

$\xrightarrow{x^3} -\infty$
 $\xrightarrow{-\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}} \right) = -\infty.$$

$\downarrow$ $\rightarrow -\frac{1}{2}$
 $+\infty$

A keresett határérték **nem létezik**, mivel a bal és jobboldali határérték különböző.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4+x^2}}{x^4} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{-2}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}} \right) =$$

$\uparrow$ $\uparrow -\frac{1}{2}$
 $+\infty$

= **$-\infty$** , hiszen a korábban is vizsgált egyoldali határértékek itt létezőek fognak és az értékek megegyeznek.

3.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = 2,$$

hierin $2x \rightarrow 0$, da $x \rightarrow 0$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{\cos(0)} \cdot 1 = 1.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \end{array} \right\} 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

d) Használjuk a rendőrelvet megint:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

de tudjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ ezért adódik:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}.$$

4.

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+2)-2}{x+2} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2} \right)^x = e^{-2}, \text{ hierin}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x+2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-2}{1+0} = -2.$$

b

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-2x} \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2-2x)+(2x-1)}{x^2-2x} \right)^{2x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^2-2x} \right)^{2x-3} = e^4, \text{ hierin}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-2x} \cdot 2x-3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x} = 4$$

c

↑

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)+2}{x+1} \right)^{x+2\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{x+2\sqrt{x}} = e^2, \text{ hierin}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} \cdot (x+2\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4\sqrt{x}}{x+1} = 2.$$

5.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\pi^2}{6}} - 1}{x} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\pi^2)^x - 1}{x} = \ln(\pi^2)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\pi}(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(\pi)}$$

Wirken tutjuch, logy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$$

6.

a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10 \ln(10)} + 1, & \text{ha } x \leq 1 \\ \log_{10}(10x), & \text{ha } 1 < x \leq 100 \\ \frac{x-100}{100 \ln(10)} + 3, & \text{ha } 100 < x \end{cases}$$

Mivel f folytonos függvények segítségével van definiálva egy azokon a helyeken ellenőrizni a folytonosságot, ahol korábban definiált volt.

(1) Az $x=1$ hely:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{x-1}{10 \ln(10)} + 1 \right) =$$

folytonos
 $x=1$ -ben

$$= \frac{1-1}{10 \ln(10)} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \log_{10}(10x) = \log_{10}(10) = 1$$

folytonos
 $x=1$ -ben

A két határérték létezik és megegyezik,
ezért adódik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

$$\text{Másképp } f(1) = \frac{1-1}{10 \ln(10)} + 1 = 1,$$

vagyis f folytonos az $x=1$ helyen.

(2) Az $x=100$ hely:

$$\lim_{x \rightarrow 100-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 100-} \log_{10}(10x) = \log_{10}(1000) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 100+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 100+} \frac{x-100}{100 \ln(10)} + 3 = 3,$$

$$\text{ezért } \lim_{x \rightarrow 100} f(x) = 3.$$

$$\text{Továbbá } f(100) = \log_{10}(1000) = 3,$$

így f folytonos az $x=100$ helyen is.

b) Az előzőhöz hasonlóan...

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sqrt{1+x}, & \text{ha } 0 < x \leq 3 \\ 2, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

(1) Az $x=0$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+0} = 1.$$

Azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$\text{Másfelől } f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1,$$

így f folytonos az $x=0$ helyen.

(2) Az $x = 3$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} 2 = 2,$$

ezért azt kaptuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2.$$

Másfelől

$$f(3) = \sqrt{1+3} = 2,$$

vagyis f folytonos az $x = 3$ helyen.

7.

a

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x^2, & \text{ha } x \leq 0 \\ 2^{-x}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Mivel f folytonos függvényekből van definiálva, így elég ott vizsgálni a folytonosságot, ahol korábban nem nyilvánvalóan volt. Ez az $x=0$ hely.

Azher, hogy folytonos legyen $x=0$ -ban kell, hogy legyen határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a - 2x^2 = a - 2 \cdot 0^2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-x} = 2^0 = 1,$$

így $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ pontosan akkor létezik,

ha $a=1$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Másfelől $f(0) = a - 2 \cdot 0^2 = a = 1$ a
konvexitási válnak miatt.

Az $a=1$ válnak esetén len folytonos
az f függvény.

b) Az előzőhöz hasonlóan ...

$$g(x) = \begin{cases} b \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}, & \text{ha } x \leq -1 \\ x \cdot \arctan(x), & \text{ha } -1 < x \leq 1 \\ \frac{\tan(c \cdot x - c)}{x - 1}, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

(1) Az $x = -1$ helyen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} b \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} b \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} b \cdot \frac{x+2}{x} = \\ &= b \cdot \frac{-1+2}{-1} = -b. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} x \cdot \operatorname{arctg}(x) = -\operatorname{arctg}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

vagyis $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ pontosan ehhez létezik, ha

$$-b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ vagyis } b = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{továbbá ehhez } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Más felől } f(-1) = -\operatorname{arctg}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

vagyis $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ választás esetén

folytatós az $x = -1$ helyen.

(2) Az $x = 1$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x \cdot \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\operatorname{tg}(c \cdot x - c)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\operatorname{tg}(c(x-1))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} c \cdot \frac{\operatorname{tg}(c(x-1))}{c(x-1)} =$$

$$= c \cdot 1 = c,$$

amiiböl $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pontosan akkor

létezik, ha $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor pedig

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ továbbá } f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

azért $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ választás esetén len

folytosság az $x = 1$ helyen.