1.

a) $f'(x) = (x^2)' - 3\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - (\cos(x))' =$

$= 2x - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (-\sin(x)) =$

$= 2x - \frac{9}{2}\sqrt{x} + \sin(x).$

b) $f'(x) = (e^x)'\cos(x) + e^x \cdot (\cos(x))' =$

$= e^x \cos(x) + e^x(-\sin(x)) =$

$= e^x(\cos(x) - \sin(x)).$

c) $$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

d

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))'\cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

e

$$f'(x) = \sin'(\cos(x^2)) \cdot \cos'(x^2) \cdot (x^2)' =$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x =$$

$$= -2x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(\cos(x^2)).$$

f

$$f'(x) = 2^{\cos(x^2)+2x} =$$

$$= \ln(2) \cdot 2^{\cos(x^2)+2x} \cdot (-\sin(x^2) \cdot 2x + 2)$$

g

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}} \ln^3(x^2+1) - \arcsin(x^3) \frac{3\ln^2(x^2+1) \cdot 2x}{x^2+1}}{\ln^6(x^2+1)}$$

h

$$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln(x) \cdot x}\right)' = e^{\ln(x) x}\left(\frac{1}{x} \cdot x + \ln(x) \cdot 1\right)$$

$$= e^{\ln(x) \cdot x}(1 + \ln(x)) = x^x + x^x \cdot \ln(x).$$

i

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3 \cdot \sin^2(x) + \cos(x^4) 2\sin(x)\cos(x)$$

j

$$f'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

k

$$f'(x) = \left(\sin(x)^{\cos(x)}\right)' = \left(e^{\ln(\sin(x)) \cdot \cos(x)}\right)' =$$

$$= e^{\ln(\sin(x))\cos(x)}\left(\frac{1}{\sin(x)} \cos(x)\cos(x) + \ln(\sin(x))(-\sin(x))\right)$$

e

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{e^x \cdot ch(x)}{arctg(\sqrt[3]{x})}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{[e^x ch(x) + e^x sin(x)] arctg(\sqrt[3]{x}) - e^x ch(x) \cdot \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{1+\sqrt[3]{x^2}}}{arctg^2(\sqrt[3]{x})} \right)$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & ha \quad x \leqq 0 \\ 2^{-x}, & ha \quad 0 < x \end{cases}$$

(1) Az $x = 0$ helyen:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{1 - 2h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0-} 2h = 0$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{2^{-h}-1}{h} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{h}-1}{h} = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mivel az egyoldali határértékek nem egyeznek meg, ezért

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

nem létezik, vagyis nem differenciálható $f$ az $x=0$ helyen.

(2) Az $x=3$ helyen:

Az $x=3$ egy kis környezetében $f$ hozzárendelése nem változik, mivel $x \mapsto 2^{-x}$ differenciálható és $(2^{-x})' = -\ln(2)\, 2^{-x}$, ezért $f$ differenciálható az $x=3$ helyen és

$$f'(3) = -\ln(2)\cdot 2^{-3} = -\frac{\ln(2)}{8}.$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{ha } 0 \leqq x \\ \sqrt{1+x}, & \text{ha } 0 < x \leqq 3 \\ 2, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

(1) Az $x = 0$ helyen:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\frac{1}{2}h + 1 - 1}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2},$$

vagyis $f$ differenciálható az $x = 0$ helyen, továbbá $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(2) Az $x = 3$ helyen:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{2-2}{h} = 0.$$

Látható, hogy $f$ nem differenciálható az $x = 3$ pontban.

$$h(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x < 0 \\ e^{x}, & \text{ha } 0 \leqq x \end{cases}$$

(1) Az $x = 0$ helyen:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{e^{-h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{h} - 1}{h} = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1.$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{e^{h} - 1}{h} = \ln(e) = 1,$$

ezért $f$ nem differenciálható az $x=0$ helyen.

(2) Az $x=3$ helyen:

Mivel az $x=3$ egy környezetében $f$ nem vált hozzárendelési szabályt és $x \mapsto e^x$ differenciálható: $(e^x)' = e^x$, ezért

$$f'(3) = e^3.$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{ha } x < 0 \\ e^{2x}, & \text{ha } 0 \leqq x \end{cases}$$

A differenciálhatóságot elég az $x=0$ helyen ellenőrizni, hiszen $f$ máshol biztosan differenciálható lesz.

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{ah^2 + bh + c - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0-} ah + b + \frac{c-1}{h} = b + \lim_{h \to 0-} \frac{c-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{e^{2h}-1}{h} = \ln(e^2) = 2.$$

Az $f$ pontosan akkor differenciálható, ha

$$2 = b + \lim_{h\to 0-} \frac{c-1}{h}.$$

Azonban tudjuk, hogy minden differenciálható függvény folytonos. Ezért annyiban feltesszük, hogy $f$ differenciálható, akkor

$$1 = f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} ax^2+bx+c = c,$$

amit visszahelyettesítve:

$$2 = b + \lim_{h\to 0-} \frac{1-1}{h} = b.$$

Az $f$ pontosan akkor differenciálható, mindenhol, ha $a\in\mathbb{R}$ tetszőleges, $b=2$, $c=1$.

4.

a) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$, $x_0=\pi^2$.

(i) Az érintőegyenes meredekségének $f'(\pi^2)$-nek kell lennie:

$$f'(x) = \cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ amiből}$$

$$f'(\pi^2) = \cos(\pi)\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} = \frac{-1}{2\pi}.$$

Az egyenes innen: $y=\frac{-1}{2\pi}x+b$.

(ii) Az érintőegyenesnek át kell mennie a $(\pi^2; f(\pi^2))$ ponton:

$$\sin(\pi) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2+b,$$

$$b=\frac{\pi}{2}.$$

Az érintő egyenlete: $y=-\frac{1}{2\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

(b) $f(x) = 2^{\sin(x)}$ , $x_0 = \pi$

(i) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$f'(\pi) = \ln(2) \cdot 2^{\sin(\pi)} \cdot \cos(\pi) = -\ln(2)$,

amiből az egyenes : $y = -\ln(2)x + b$.

(ii) $2^{\sin(\pi)} = -\ln(2) \cdot \pi + b$

$b = \ln(2) \cdot \pi$.

Az érintő egyenlete innen

$$y = -\ln(2)x + \ln(2)\pi.$$

5. $f(x) = \ln(x^2+1)$.

Az érintőegyenes $45°$-os szöget zár be az $x$-tengellyel pontosan azt jelenti, hogy a meredeksége $\operatorname{arctg}(45°) = 1$.

Keressük meg azokat a pontokat, amikre $f'(x) = 1$. Mivel $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, ezért

$$1 = \frac{2x}{x^2+1} \iff 0 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

amiből $x = 1$ a megoldás.

Mivel az érintő ekkor $y = x + b$ alakú, de át kell mennie a $(1, f(1))$ ponton, ezért

$$\ln(2) = 1 + b$$

$$b = \ln(2) - 1,$$

így az egyenes egyenlete

$$y = x + \ln(2) - 1.$$