

2.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

(i) Minden valós szám esetén értelmes, ezért

$$D_f = \mathbb{R}.$$

(ii)-(iii) Mivel f differenciálható

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

amiből összefoglalva táblázatosan

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f(x)$	csökken	MIN	nö"	MAX	csökken
$f'(x)$	-	0	+	0	-

A lokális szélsőértékek innen:

- az $x = -1$ helyen: $f(-1) = -\frac{1}{2}$

- az $x = 1$ helyen: $f(1) = \frac{1}{2}$

(iv) Mivel f kétszer differenciálható:

$$f''(x) = \frac{-2x^2(1+x^2)^2 - (1-x^2)2x^2 \cdot 2(1+x^2)}{[(1+x^2)^2]^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^4}.$$

Táblázatosan összehelyezve

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f(x)$	-	INF.	+	INF.	-	INF.	+
$f''(x)$	konkáv	0	konvex	0	konkáv	0	konvex

Az inflexió pontok innen: $x = \pm\sqrt{3}, 0$.

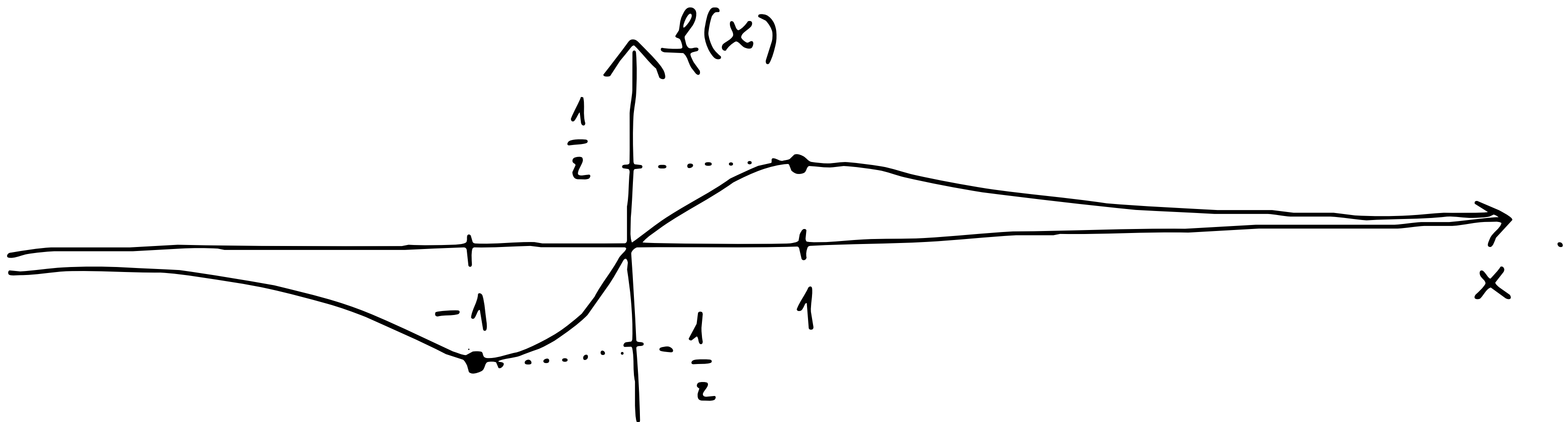
(v) Aszimptotikusan vizsgáljuk meg őket.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0.$$

A zérushelyek: $x=0$.

A következőkben birtokában felvázolva a függvényt



(vi) Az értékkészlet innen könnyen leolvasható:

$$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$g(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

(i) A nullán kívül mindenhol értelmezve van:

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) - (iii)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = \\ &= e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) \end{aligned}$$

$g'(x) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1) = 0$ pontosan akkor, ha $2x-1=0$, hiszen $e^{\frac{1}{x}} > 0$.

Innen táblázattal foglálva

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$g(x)$	csökken	csökken	MIN	nö"
$g'(x)$	-	-	0	+

A lokális szélsőértékek innen:

- az $x = \frac{1}{2}$ helyen lokális minimum
 $f(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{e^2}{4}$ értékkel.

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad g''(x) &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)(2x-1) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2 = \\
 &= e^{\frac{1}{x}} \left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} > 0,
 \end{aligned}$$

hiszen $2x^2 - 2x + 1$ diszkriminánsa negatív és az x^2 együtthatója pozitív.

Táblázatosan összefoglalva

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$g(x)$	konvex	konvex
$g''(x)$	+	+

A függvények numerikus inflexió pontjai.

(v) Vizsgáljuk meg aszimptotikusan

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Az $x=0$ helyen nem értelmezett, így vizsgáljuk meg itt is.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

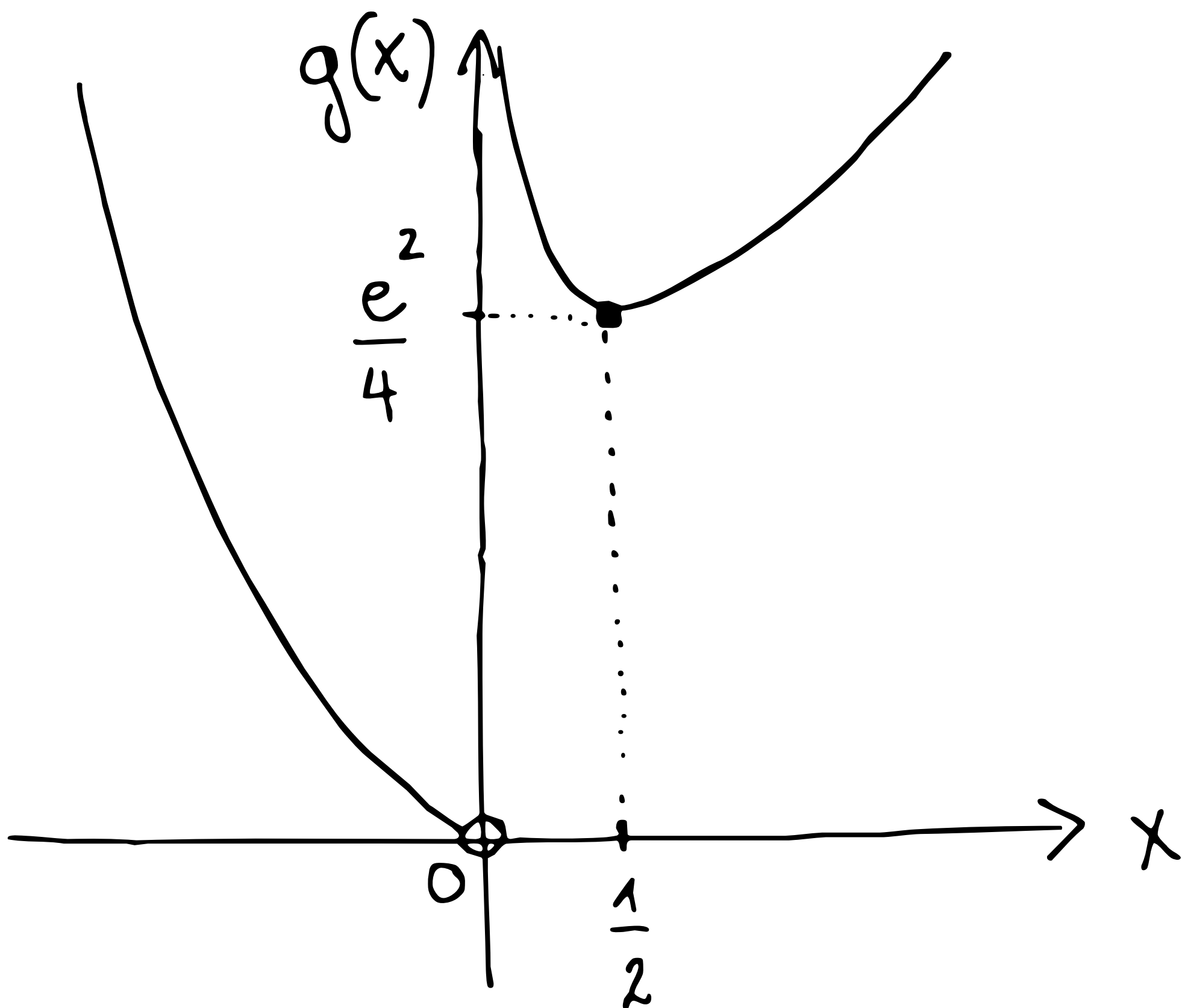
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\downarrow 0} = 0.$$

keressük meg a zérushelyeket:

$$g(x) = x^2 \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{> 0} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

de az $x=0$ helyen nem értelmezett, így nincsenek zérushelyei.

A függvény grafikonja vázlatosan:



(vi) Az értelmezési tartományok:

$$D_g = (0, +\infty).$$

$$h(x) = x^2 \ln(x^2)$$

(i) Az $x=0$ hely környezetében $h(x)$ mindenképp értelmezve van.

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) - (iii)

$$h'(x) = 2x \cdot \ln(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2} = 2x(\ln(x^2) + 1)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow (1) 2x = 0 \quad \vee \quad (2) \ln(x^2) + 1 = 0$$

(1) $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, de itt $h(x)$ nem értelmez.

$$(2) \ln(x^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = e^{-1},$$

amiből $|x| = \frac{1}{\sqrt{e}}$, ezért $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Táblázatosan összefoglalva:

	$(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}})$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$
$h(x)$	csökken	MIN	nö	csökken	MIN	nö
$h'(x)$	-	0	+	-	0	+

A lokális mélységek ehhez:

- az $x = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ helyen lokális minimuma van $f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$ értékkel.

- az $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ helyen lokális minimuma van $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$ értékkel.

$$(iv) \quad h''(x) = 2(\ln(x^2) + 1) + 2x \cdot \frac{2x}{x^2} = 2(\ln(x^2) + 2)$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = -2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{e}$$

Táblázatosan összefoglalva:

	$(-\infty, -\frac{1}{e})$	$-\frac{1}{e}$	$(-\frac{1}{e}, 0)$	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$h(x)$	konvex	INF.	konkáv	konkáv	INF.	konvex
$h''(x)$	+	0	-	-	0	+

Az inflexió's pontok: $x = \pm \frac{1}{e}$.

(v) Asimptotikusan vizsgáljuk meg:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overset{+\infty}{x^2} \cdot \overset{+\infty}{\ln(x^2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overset{+\infty}{x^2} \cdot \overset{+\infty}{\ln(x^2)} = +\infty$$

Az $x=0$ helyen nem értelmezett így itt is vizsgáljuk

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x^2 \cdot \ln(x^2) = \dots = \lim_{x \rightarrow 0-} -x = 0$$

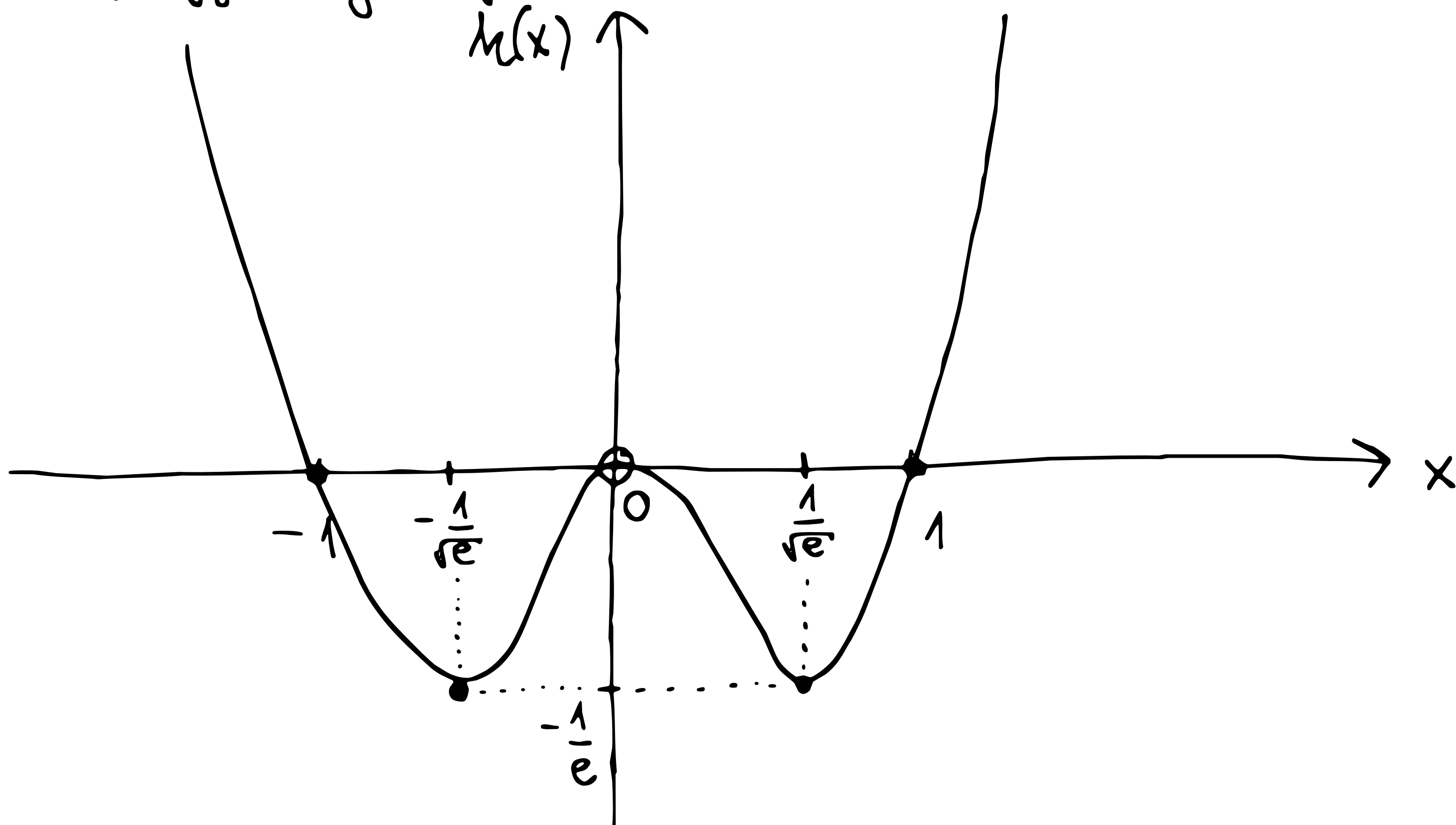
A zérushelyek:

$$x^2 \cdot \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow (1) x^2 = 0 \quad \vee \quad (2) \ln(x^2) = 0$$

(1) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, de itt $h(x)$ nem értelmes

$$(2) \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

A függvény képe innen láthatóan:



(vi) Az értékkészlete $h(x)$ -nek:

$$R_h = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

$$i(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

(i) A függvény akkor értelmes, ha $x-1 > 0$,
ezért

$$D_i = (1, +\infty).$$

$$(ii)-(iii) \quad i'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x-1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}^2} =$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1} - x}{2 \cdot (x-1) \sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1) - x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{x-2}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}},$$

amiből $i'(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x=2$.

Táblázatosan összefoglalva:

	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$i(x)$	csökken	MIN	nö
$i'(x)$	-	0	+

Az $i(x)$ függvény lokális szélsőértékei:

- lokális minimuma van az $x=2$ helyen, aminek az értéke $i(2) = 2$.

$$\begin{aligned}
 (iv) \quad i''(x) &= \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}} - (x-2) \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{\frac{1}{2}}}{4(x-1)^3} = \\
 &= \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (2(x-1) - 3(x-2))}{4(x-1)^3} = \\
 &= \frac{2x-2-3x+6}{4(x-1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4-x}{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

amiből $i''(x) = 0 \Leftrightarrow 4-x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Táblázatosan összefoglalva.

	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$i(x)$	konvex	INF.	konkáv
$i''(x)$	+	0	-

Az inflexió's pontok: $x=4$ helyen.

(v) Asimptotikus vizsgáljuk meg:

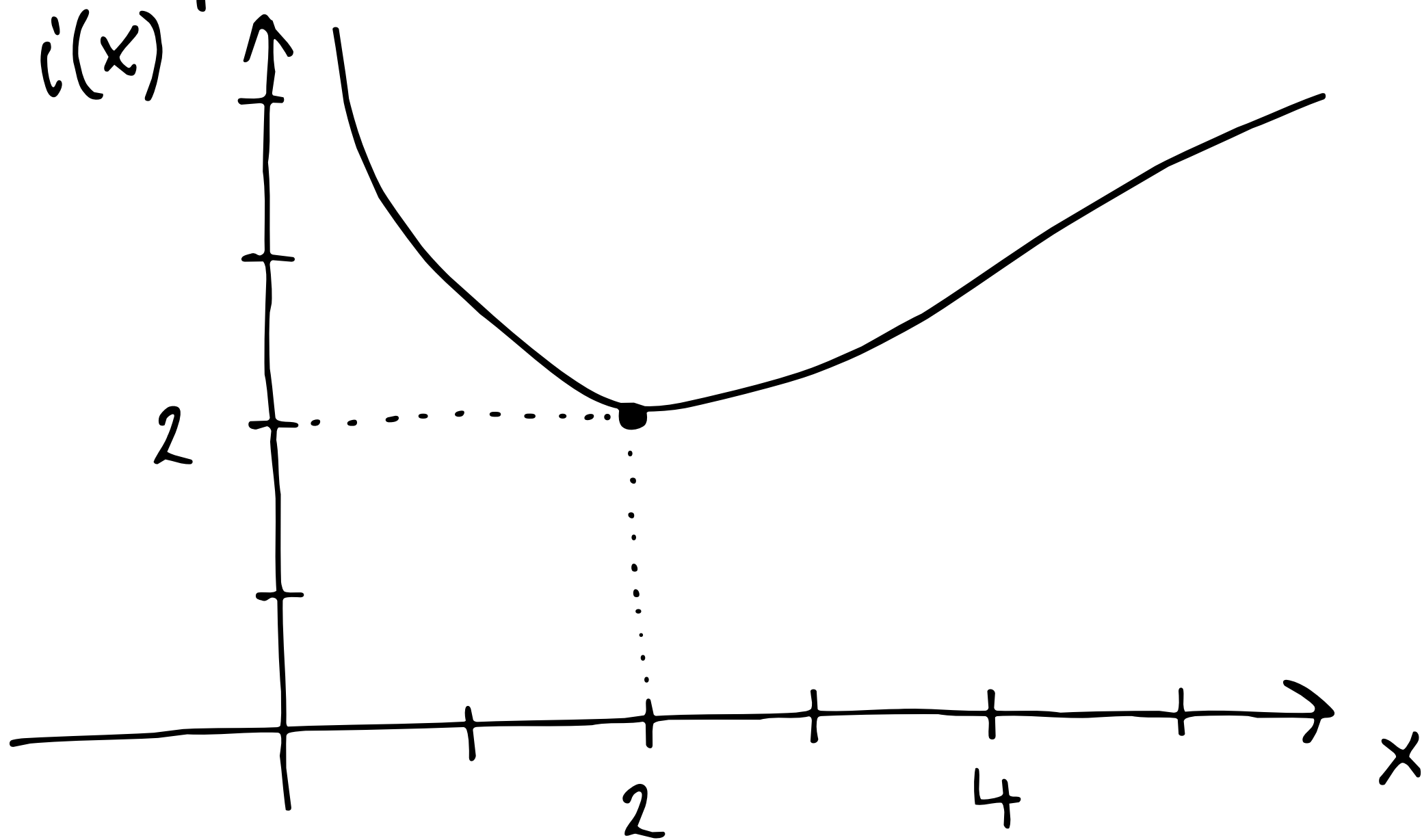
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x-1} = +\infty$$

Az értelmezési tartomány határán:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

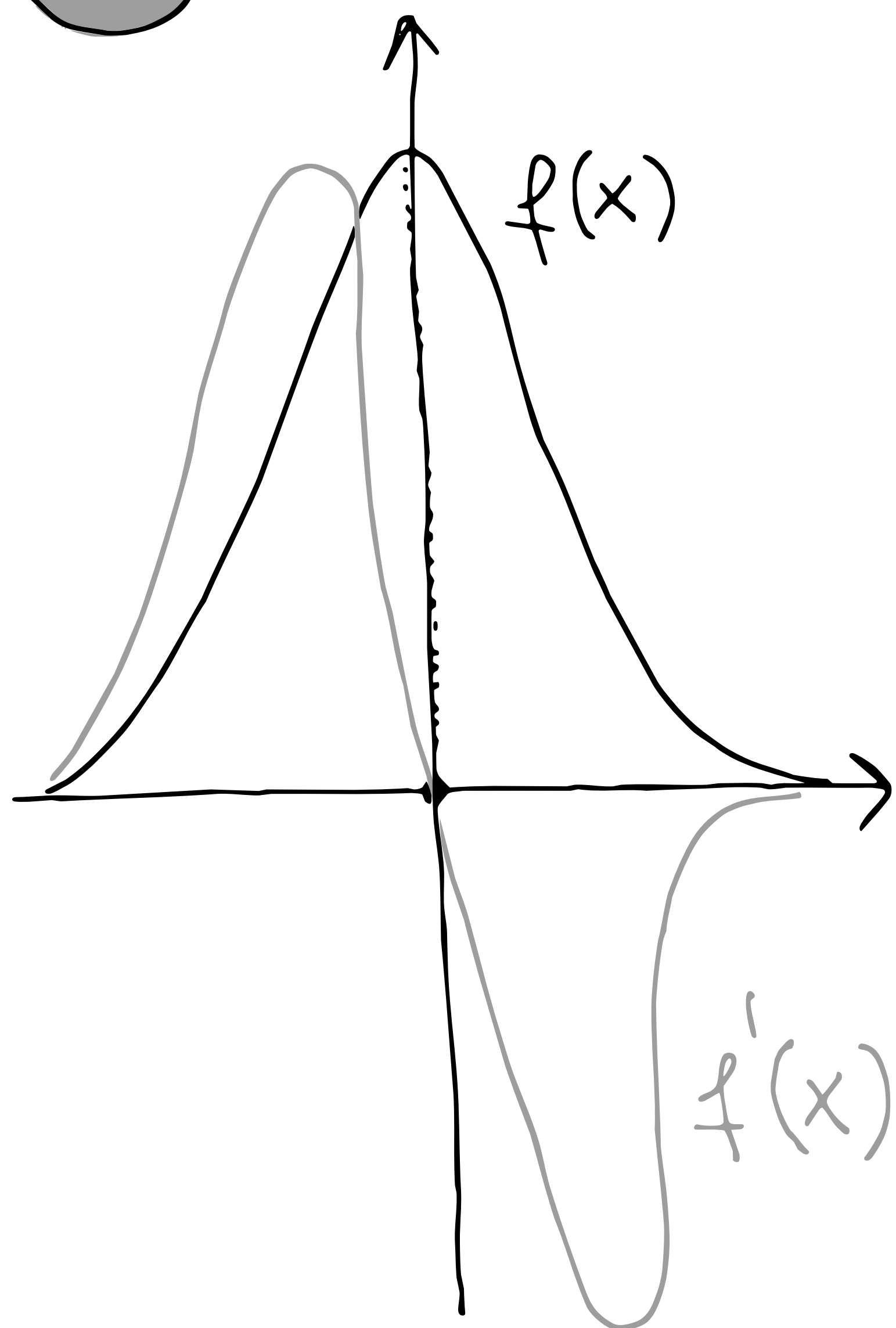
Zérushely: $i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, de $0 \notin D_i$.



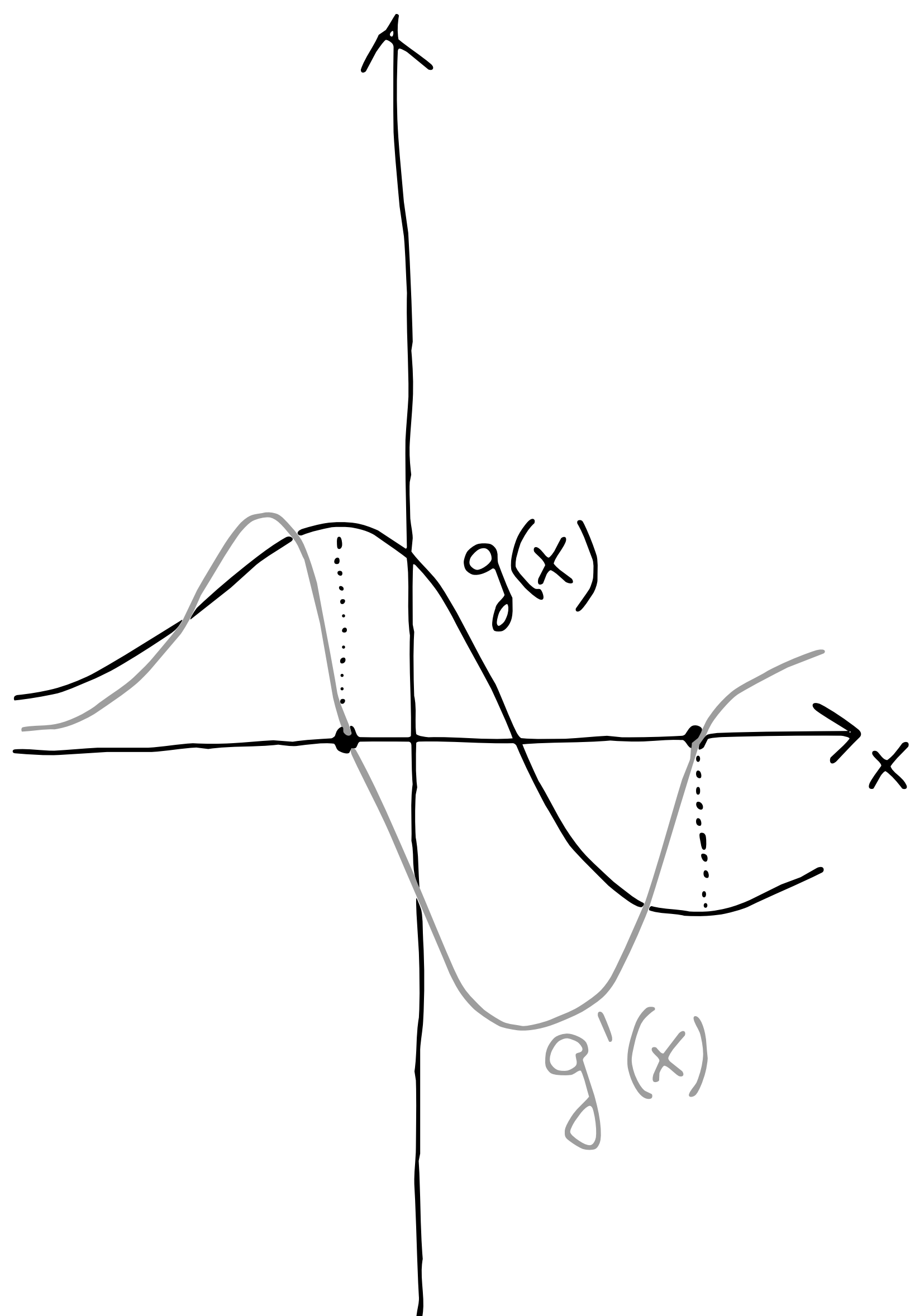
(vi) Az értelmezése ehhez

$$R_i = [2, +\infty)$$

2.



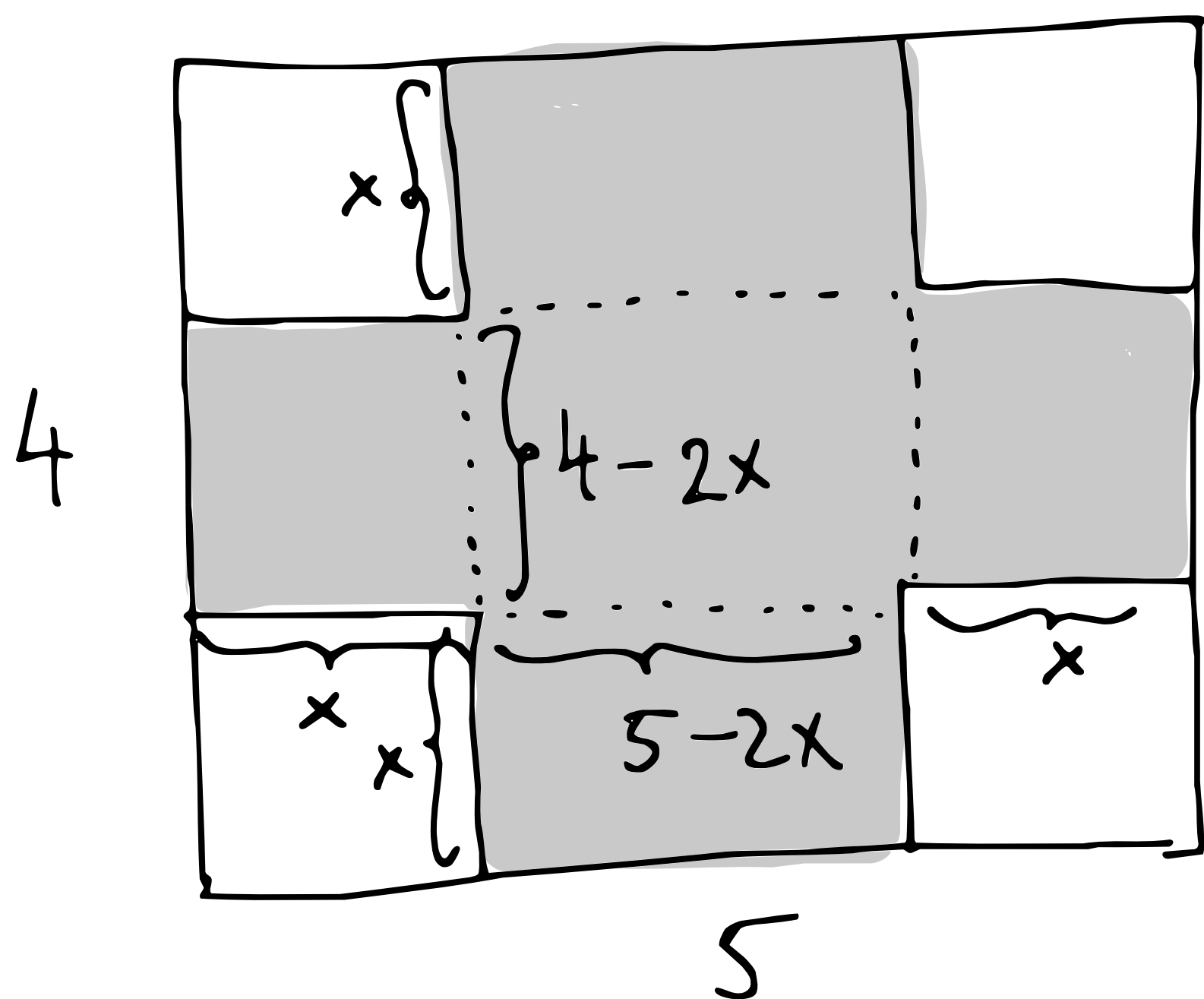
x



Függvények oda:

- Akkor szükséges-e van a függvénynek, ott a deriváltnak zérushelye van.
- Akkor "nő" a függvény, ott a derivált ≥ 0 ,
akkor csökken ott ≤ 0 .

3. Legyen x a kivágott négyzetek oldalai-
nak a kosra alján-ben.



A kapott doboz térfogata

$$V(x) = (4-2x)(5-2x)x =$$

$$= 20x - 18x^2 + 4x^3,$$

ahol nyilván $0 < x < 2$.

$$V'(x) = 20 - 36x + 12x^2 = 0$$

$$\frac{5}{3} - 3x + x^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{3} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}},$$

amiből

$$x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}}, \text{ mert } \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}} > 2.$$

Közelítőre

$$\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.736$$

Másfelől

$$V''(x) = 24x - 36,$$

így

$$V''(0.736) = 24 \cdot 0.736 - 36 < 0,$$

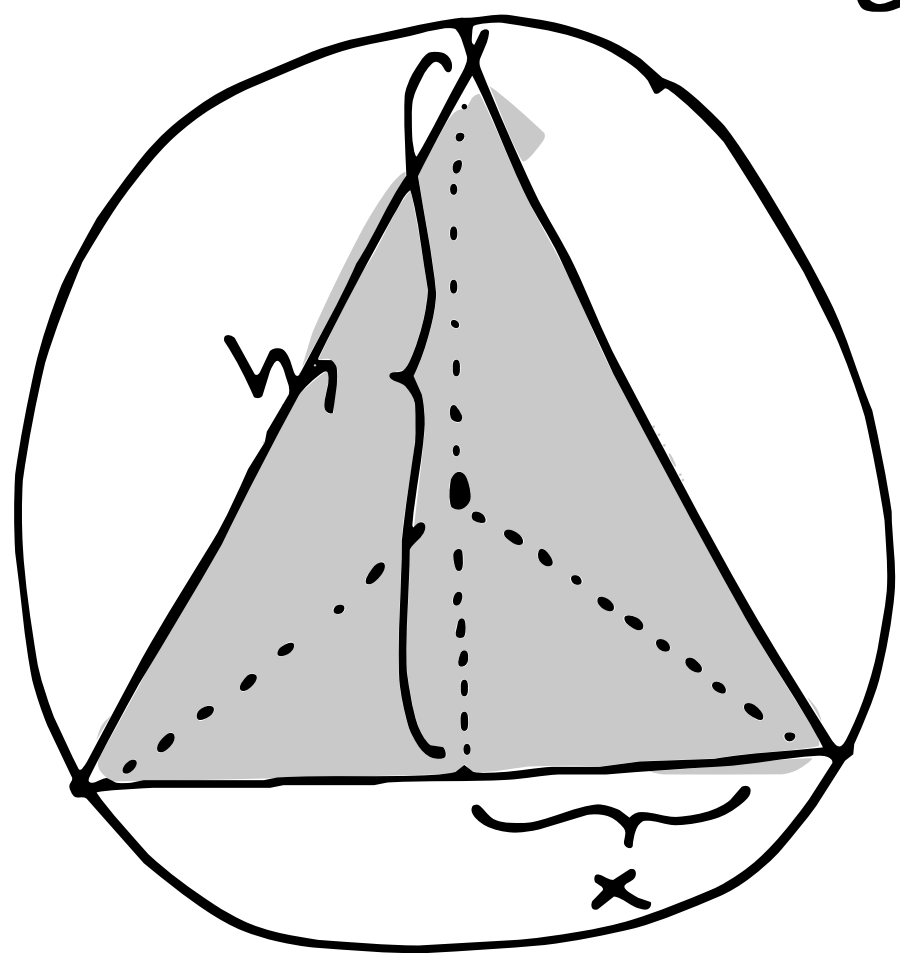
így itt lokális maximuma van.

Megj.: Mivel $x \in [0, 2]$ és $V(x) \geq 0$ folytonos,

így felvesszük a maximumát. Másfelől a határértékek $V(0) = V(2) = 0$ és $V\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}}\right) > 0$, ezért itt van az abszolút maximuma is.

Vagyis **7.36 cm** oldalú négyzeteket kell kivágni.

4. Könnyű belátni, hogy egy maximális térfogatú gúla csak az ábrán látható módon helyezkedhet el a gömbben.



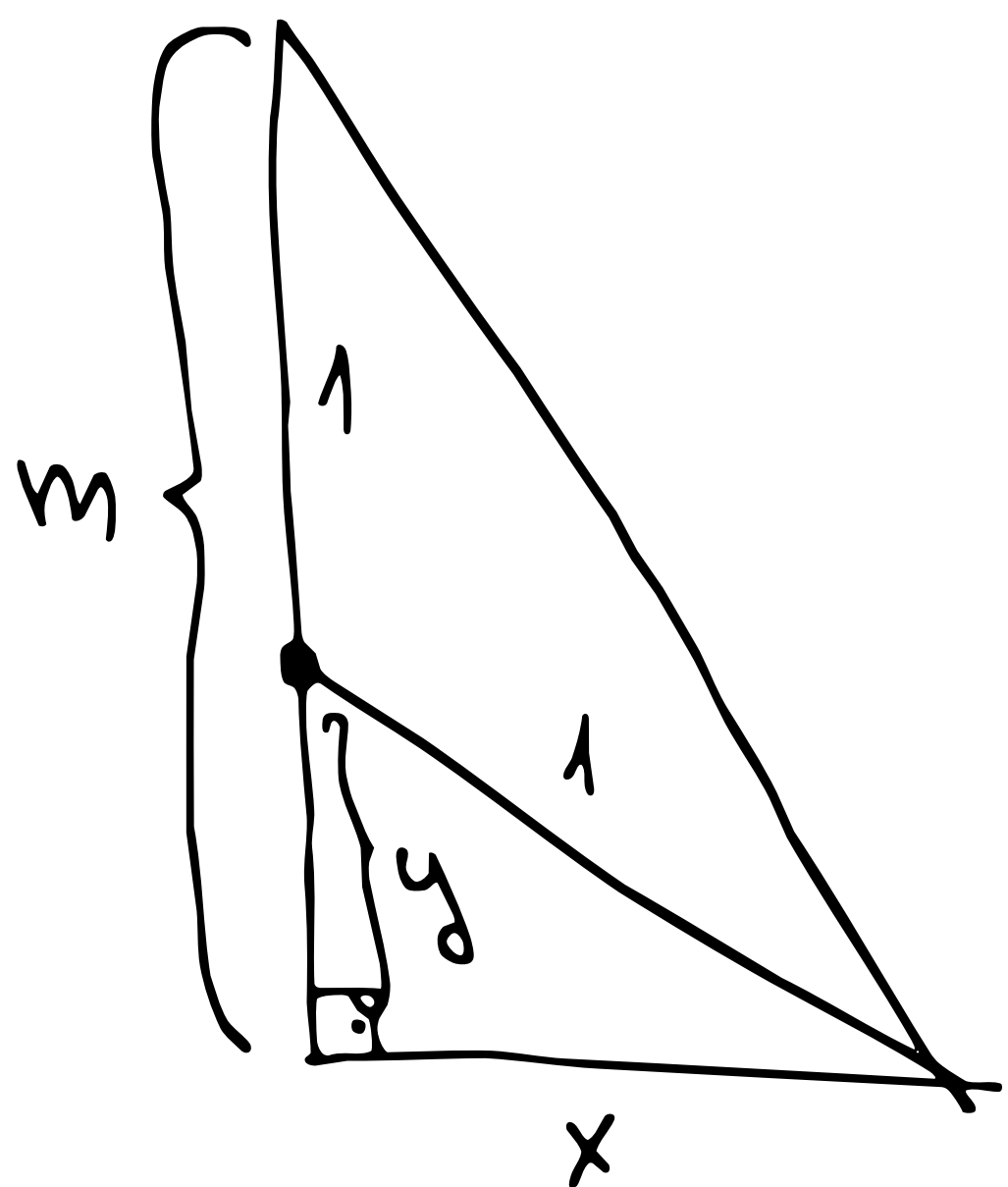
Legyen x a gúla alapjainak a sugara dőben.

Amennyiben m a gúla magassága, akkor

$$1^2 = x^2 + y^2, \text{ amiből}$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ innen pedig}$$

$$m = 1 + y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$$



A gúla térfogata:

$$V(x) = \frac{x^2 \pi \cdot m}{3} = \frac{1}{3} x^2 \pi (1 + \sqrt{1 - x^2})$$

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{2\pi}{3} x (1 + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{\pi}{3} x^2 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \\ &= \frac{\pi}{3} x \left(1 + \sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3} x \left(\frac{\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) + x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} x \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0,$$

ami pontosan akkor, ha $(0 < x < 1)$

$$\sqrt{1-x^2} + 2x^2 - 1 = 0$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1$$

$$1-x^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1$$

$$0 = 4x^4 - 3x^2$$

$$0 = x^2(4x^2 - 3),$$

amiből $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Legyen a henger sugara r (dm),
míg a magassága m (dm). A feladatot
nevezt $1 = r^2 \pi \cdot m$, amiből

$$m = \frac{1}{r^2 \pi}.$$

Mivel a felülete $2 \cdot r^2 \pi + 2 r \pi \cdot m$,
ezért a felület $A(r)$ az r függvényében

$$A(r) = 2 \cdot r^2 \pi + 2 r \pi \cdot \frac{1}{r^2 \pi} = 2 r^2 \pi + \frac{2}{r}.$$

Keressük meg a minimumhelyet:

$$A'(r) = 4 r \pi + \frac{-2}{r^2} = 4 r \pi - \frac{2}{r^2} = 0$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2 \pi}}$$

$$A''(r) = 4 \pi + \frac{4}{r^3} > 0, \text{ hiszen } r > 0.$$

Mivel az $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2 \pi}}$ helyen az első
derivált nulla, illetve a második

derivált pozitív, így a függvénynek lokális minimuma van az $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ helyen.

Másfelől látható, hogy mivel $r > 0$ és

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(2r^2\pi + \frac{2}{r} \right) = +\infty$$

$\nearrow +\infty$ $\nearrow 0$

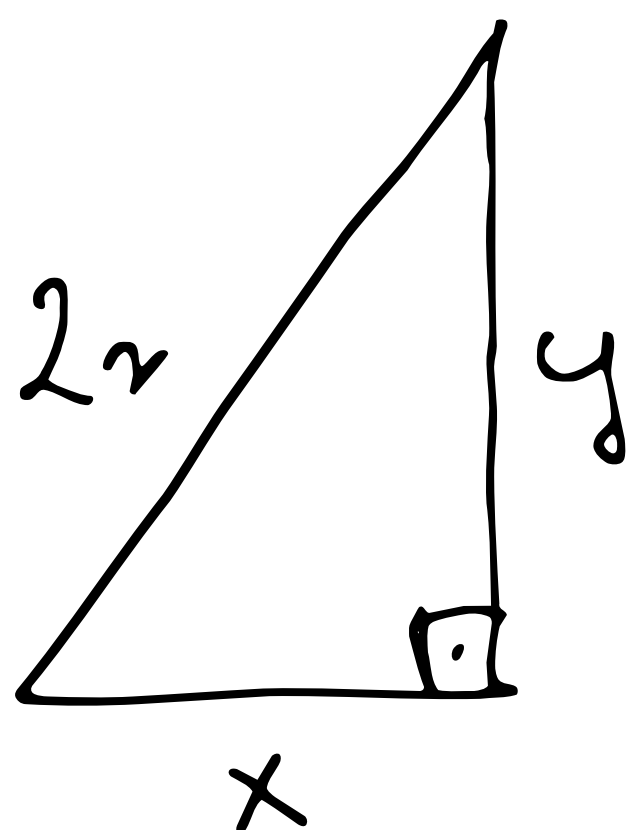
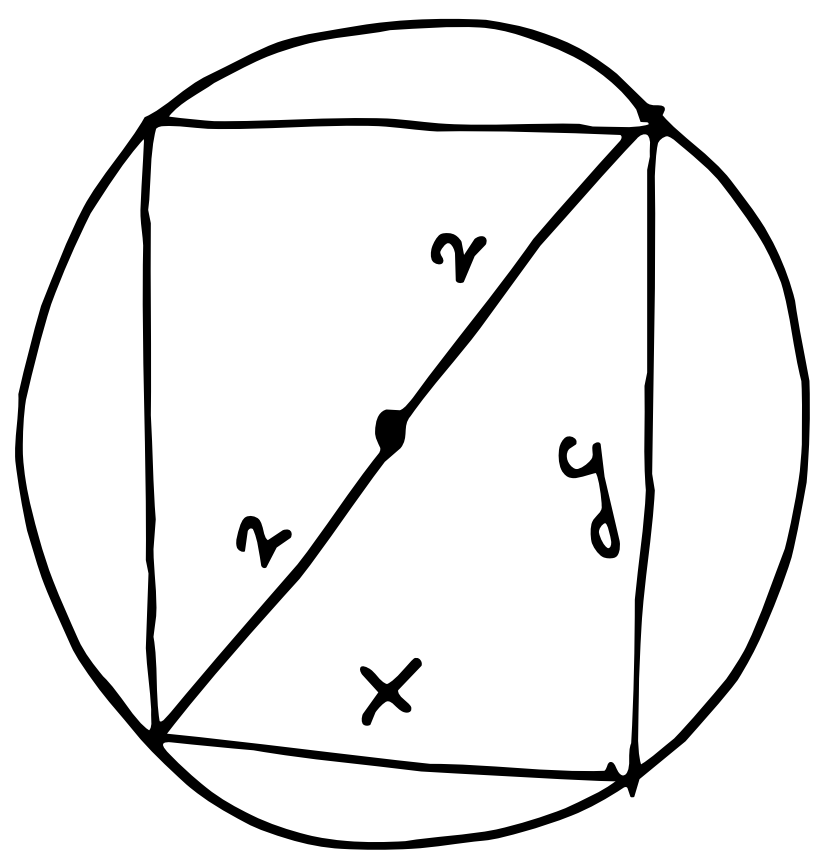
$$\lim_{r \rightarrow 0+} A(r) = \lim_{r \rightarrow 0+} \left(2r^2\pi + \frac{2}{r} \right) = +\infty$$

$\searrow 0$ $\rightarrow +\infty$

Ezért az $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ helyen abszolút minimuma van a függvénynek. A magasság pedig

$$\text{ehhez } m = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}.$$

6. Legyenek az oldalak x és y . Ekkor



$$x^2 + y^2 = 4r^2$$

$$y^2 = 4r^2 - x^2$$

Mivel a terület a négyzetek $T = xy$, továbbá a négyzeteségi mártan $u''(0, +\infty)$ -en, T -nek és T^2 -nek ugyanott vannak a miből-értékeik.

$$T^2(x) = x^2(4r^2 - x^2) = 4r^2x^2 - x^4,$$

amiből

$$T^{2'}(x) = 8r^2x - 4x^3 = 4x(2r^2 - x^2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{2}r \end{cases}$$

Mivel nyilván $0 < x < 2r$ és

	$(0, \sqrt{2}r)$	$\sqrt{2}r$	$(\sqrt{2}r, 2r)$
$T^2(x)$	nö	MAX	csökken
$T^{2'}(x)$	+	0	-

így lokális maximuma van $r = \sqrt[3]{2}r$ -ban

Másfelől mivel $0 < x < 2r$, illetve

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2r-} T^2(x) &= \lim_{x \rightarrow 2r} 4r^2x - x^3 = 4r^2 \cdot 2r - (2r)^3 = \\ &= 8r^3 - 8r^3 = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} T^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 4r^2x - x^3 = 0 - 0 = 0,$$

ezért $T^2(x)$ -nek abszolút maximuma

van az $x = \sqrt{2} \cdot r$ helyen, így $T(x)$ -nek

is, ehhez az $y^2 = 4r^2 - 2r^2 = 2r^2$,

amiből $y = \sqrt{2} \cdot r$.

Adódik, hogy a $\sqrt{2} \cdot r$ oldalú négyzet területe len maximumális.

A terület ehhez $2r^2$ len.