1.

a) $$\int x^2 - x + 1 \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$$

Általánosan is igazak, hogy

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1).$$

$$\int \alpha \cdot f(x) \, dx = \alpha \cdot \int f(x) \, dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

b) $$\int \sqrt{3x-1} \, dx = \int (3x-1)^{\frac{1}{2}} \, dx =$$

$$= \frac{(3x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{1}{3} + c = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(3x-1)^3} + c.$$

c

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + c$$

d

$$\int x \cdot \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + c$$

e

$$\int e^{2x} + 5^{x}\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{5^{x}}{\ln(x)} + c$$

Általánosan is igaz, hogy

$$\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c.$$

2. Néhány klasszikus típus:

$$\int f'(x)\cdot f(x)^{\alpha}\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c$$

a

ha $f(x) = \cos(x)$

$$\int \sin(x)\cos^3(x)\,dx = -\int \underbrace{-\sin(x)}_{f'(x)}\,\underbrace{\cos^3(x)}_{f^3(x)}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos^4(x)}{4} + c$$

b

ha $f(x) = \cos(x)$

$$\int tg(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin(x)}^{f'(x)}}{\underbrace{\cos(x)}_{f(x)}}\,dx =$$

$$= -\ln(|\cos(x)|) + c$$

c

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx \overset{\text{ha } f(x)=e^{2x}+3}{=} \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2e^{2x}}^{f'(x)}}{\underbrace{e^{2x}+3}_{f(x)}}\,dx =$$

$$= \ln(|e^{2x}+3|)+c$$

d

$$\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)\sin(x)\,dx =$$

$$= \int (1-\cos^2(x))\sin(x)\,dx = \text{ha } f(x)=\cos(x)$$

$$= \int \sin(x) \overbrace{-\sin(x)}^{f'(x)}\overbrace{\cos^2(x)}^{f^2(x)}\,dx =$$

$$= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + c$$

e

ha $f(x)=\sin(x)$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin^{-2}(x)}_{f^{-2}(x)}\,dx =$$

$$= \frac{\sin^{-1}(x)}{-1} + c = \frac{-1}{\sin(x)} + c$$

3 Általánosan polinomosztással hozzuk egyszerűbb alakra a törtfüggvényeket.

$$\int \frac{a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{bx+c}\,dx = \ldots =$$

$$= \int d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0 + \frac{m}{bx+c}\,dx =$$

$$\frac{d_{n-1} \cdot x^n}{n} + \ldots + \frac{d_1 \cdot x^2}{2} + d_0 x + m \ln(|bx+c|) + k$$

itt k a konstans, mert c már foglalt.

a) Végezzük el a polinomosztást.

$$
\begin{array}{l}
x+3 \;:\; (x-3) = 1 \\
\ominus\; \underline{x-3} \qquad (x-3)\cdot 1 \\
\qquad 6
\end{array}
$$

$$\int \frac{x+3}{x-3}\,dx = \int 1 + \frac{6}{x-3}\,dx =$$

$$= x + \ln(|x-3|) + c$$

b)

$$
\begin{array}{l}
x^2+3 \;:\; (x-3) = x+3 \\
\ominus\; \underline{x^2-3x} \qquad (x-3)\cdot x \\
\qquad 3x+3 \\
\ominus\; \underline{3x-9} \qquad (x-3)\cdot 3 \\
\qquad\quad 12
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^2+3}{x-3}\,dx = \int x+3+\frac{12}{x-3}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 12\cdot \ln(|x-3|) + c$$

c

$$x^2+2x-3 : (x+1) = x+1$$

$$\begin{array}{r l}
\ominus\ x^2+x & \leftarrow (x+1)\cdot x \\
\hline
x-3 & \\
\ominus\ x+1 & \leftarrow (x+1)\cdot 1 \\
\hline
-4 &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x+1}\,dx = \int x+1-\frac{4}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x-4\cdot\ln(|x+1|)+c.$$

d

$$x^3+1 : (x-2) = x^2+2x+2$$

$$\begin{array}{r}
\ominus\ x^3-2x^2 \\
\hline
2x^2+1 \\
\ominus\ 2x^2-2x \\
\hline
2x+1 \\
\ominus\ 2x-4 \\
\hline
5
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x-2}\,dx = \int x^2+2x+2+\frac{5}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+x^2+2x+5\cdot\ln(|x+1|)+c.$$

4. Parciális integrálás:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

a)

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(2x)}{2}}_{g(x)}\,dx$$

Itt célszerű az $f(x) = x^2$ választás, mivel egy kétszer deriválva x^2-et konstans lesz.

$$= -\frac{x^2\cdot\cos(2x)}{2} + \int x\cdot\cos(2x)\,dx$$

Megint integráljuk parciálisan a második tagot:

$$\int x\cdot\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx =$$

$$= x\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{-\cos(2x)}{4} + c,$$

amiből a válasz a feladatra:

$$\int x^2 \cdot \sin(2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^2\cos(2x)}{2} + \frac{x\cdot\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + c.$$

b

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx =$$

$$= \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx =$$

$$= \ln(x)\cdot x - \int 1\,dx = \ln(x)\cdot x - x + c$$

(c)

$$\int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\cos(3x)}_{f(x)} dx = \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\cos(3x)}_{f(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(-3\sin(3x))}_{f'(x)} dx$$

$$= e^x \cos(3x) + \int e^x \cdot 3\sin(3x)\, dx$$

Végezzünk megint parciális integrálást

$$\int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{3\sin(3x)}_{f(x)} dx =$$

$$= \underbrace{e^x}_{g(x)} \cdot \underbrace{3\sin(3x)}_{f(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{9\cos(3x)}_{g(x)} dx =$$

$$= e^x \cdot 3\sin(3x) - 9 \cdot \int e^x \cos(3x)\, dx,$$

vagyis összefoglalva:

$$\int e^x \cos(3x)\, dx =$$

$$= e^x \cdot \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9\int e^x \cos(3x)\, dx,$$

amit tovább rendezve:

$$10\int e^x \cos(3x)\,dx = e^x\cdot\cos(3x) + 3e^x\sin(3x)$$

innen pedig a megoldás

$$\int e^x\cos(3x)\,dx = \frac{e^x\cdot\cos(3x)+3e^x\sin(3x)}{10}+c$$

d

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\cdot \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{2x}_{f'(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\,dx =$$

$$= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx.$$

Végezzünk újabb parciális integrálást.

$$\int \underbrace{2x}_{f(x)}\underbrace{e^{-x}}_{g'(x)}\,dx = \underbrace{2x}_{f(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)}\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)}\,dx =$$

$$= -2xe^{-x} - 2\int -e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c,$$

innen pedig a megoldás:

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx = -x^2\cdot e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

5.

a) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

Itt célszerű $u=\sqrt{x}$ helyettesítést alkalmazni, mivel ekkor eltűnik a gyökjel. Ezután ki kell fejezni dx-et u-nak a segítségével. Ezt lehet többféleképpen:

(1) $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x}$, hiszen $u=\sqrt{x}$.

Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$$

Az egyenletet átrendezve: $2u\,du = dx$

(2) $u^2 = x$, hiszen $u=\sqrt{x}$.

Ekkor

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}u^2 = 2u$$, amiből $dx = 2u\,du$.

Most már el tudjuk végezni a helyettesítést

$$\int \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}}_{=u}+1}\,\underbrace{dx}_{=2u\,du} = \int \frac{1}{u+1}\,2u\,du = \int \frac{2u}{u+1}\,du$$

A polinomosztást elvégezve

$$\left.\begin{array}{l} 2u : (u+1) = 2 \\ \ominus\ \underline{2u+2} \\ \quad\ -2 \end{array}\right\} \quad \frac{2u}{u+1} = 2 - \frac{2}{u+1}$$

$$= \int 2 - \frac{2}{u+1}\,du = 2\overset{\sqrt{x}}{u} - 2\ln(|\overset{\sqrt{x}}{u}+1|) + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

(b) Általánosan egy

$$\int f'(x)\, g(f(x))\, dx$$

alakú integrál esetén az $u = f(x)$ helyettesítéssel élve

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$$

amiből $du = f'(x)\,dx$ és ezért

$$\int f'(x)\, g(f(x))\, dx = \int g(\underbrace{f(x)}_{=u})\, \underbrace{f'(x)\, dx}_{=du} =$$

$$= \int g(u)\, du$$

A feladatban:

$$\int \frac{(\ln(x)+2)^2}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} (\ln(x)+2)^2\, dx$$

itt: $g(x) = x^2$, $f(x) = \ln(x)+2$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, amiből $u = \ln(x) + 2$ helyettesítéssel:

$$= \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln(x)+2)^3}{3} + c$$

c

$$\int \sin(x) \cos(x) e^{-\sin^2(x)} \, dx =$$

Vegyük észre, hogy amennyiben

$g(x) = x \cdot e^{-x^2}$, $f(x) = \sin(x) \rightsquigarrow f'(x) = \cos(x)$,

akkor az előző b feladatbeli típus megint.

Ekkor $u = \sin(x)$ helyettesítéssel

$$= \int u \cdot e^{-u^2} \, du = -\frac{1}{2} \cdot e^{-u^2} + c = -\frac{1}{2} e^{-\sin^2(x)} + c$$

d)

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$$

Itt célszerű $u = e^x$ helyettesítést alkalmazni.

Ekkor

$$\boxed{\frac{du}{dx}} = \frac{d}{dx} e^x = e^x = \boxed{u},$$

amiből $\frac{1}{u}\,du = dx$. Innen behelyettesítve

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{u^3}{u+2} \cdot \frac{1}{u}\,du = \int \frac{u^2}{u+2}\,du =$$

A polinomosztást elvégezve

$$\left.\begin{array}{l} u^2 : (u+2) = u-2 \\ \ominus\ \underline{u^2+2u} \\ \quad -2u \\ \quad \ominus\ \underline{-2u-4} \\ \qquad\quad 4 \end{array}\right\} \quad \frac{u^2}{u+2} = u-2+\frac{4}{u+2}$$

$$= \int u-2+\frac{4}{u+2}\,du = \frac{u^2}{2} - 2u + \ln(|u+2|) + c =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + \ln(e^x+2) + c$$