

1.

a) Amennyiben $F'(x) = f(x)$, továbbá $f(x)$ értelmes az $[a, b]$ minden pontjában

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

$$\int_0^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{x=0}^{x=2} =$$

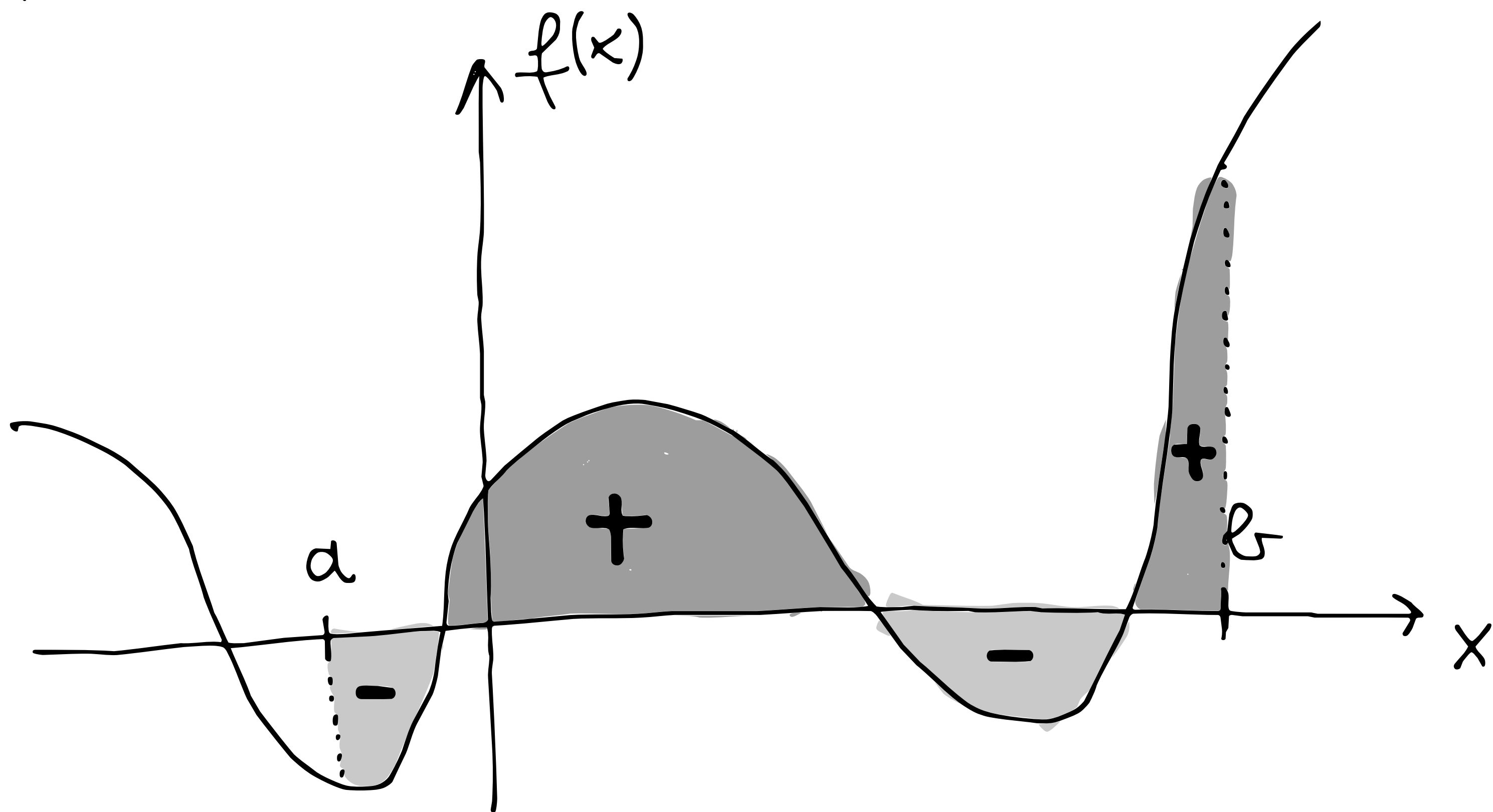
$$= \left(\frac{1}{3} 2^3 - 2^2 \right) - \left(\frac{1}{3} 0^3 - 0^2 \right) = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$b) \int_1^e \frac{(\ln(x)+2)^2}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x)+2)^3}{3} \right]_{x=1}^{x=e} =$$

$$= \frac{(\ln(e)+2)^3}{3} - \frac{(\ln(1)+2)^3}{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$$

2.

a) Amennyiben $\int_a^b f(x) dx$ létezik, akkor az értéke megadja az $f(x)$ függvény és az x -tengely által határolt előjeles területet (az x -tengely feletti részek pozitív, az alatta lévőek negatív előjellel számítandóak bele).

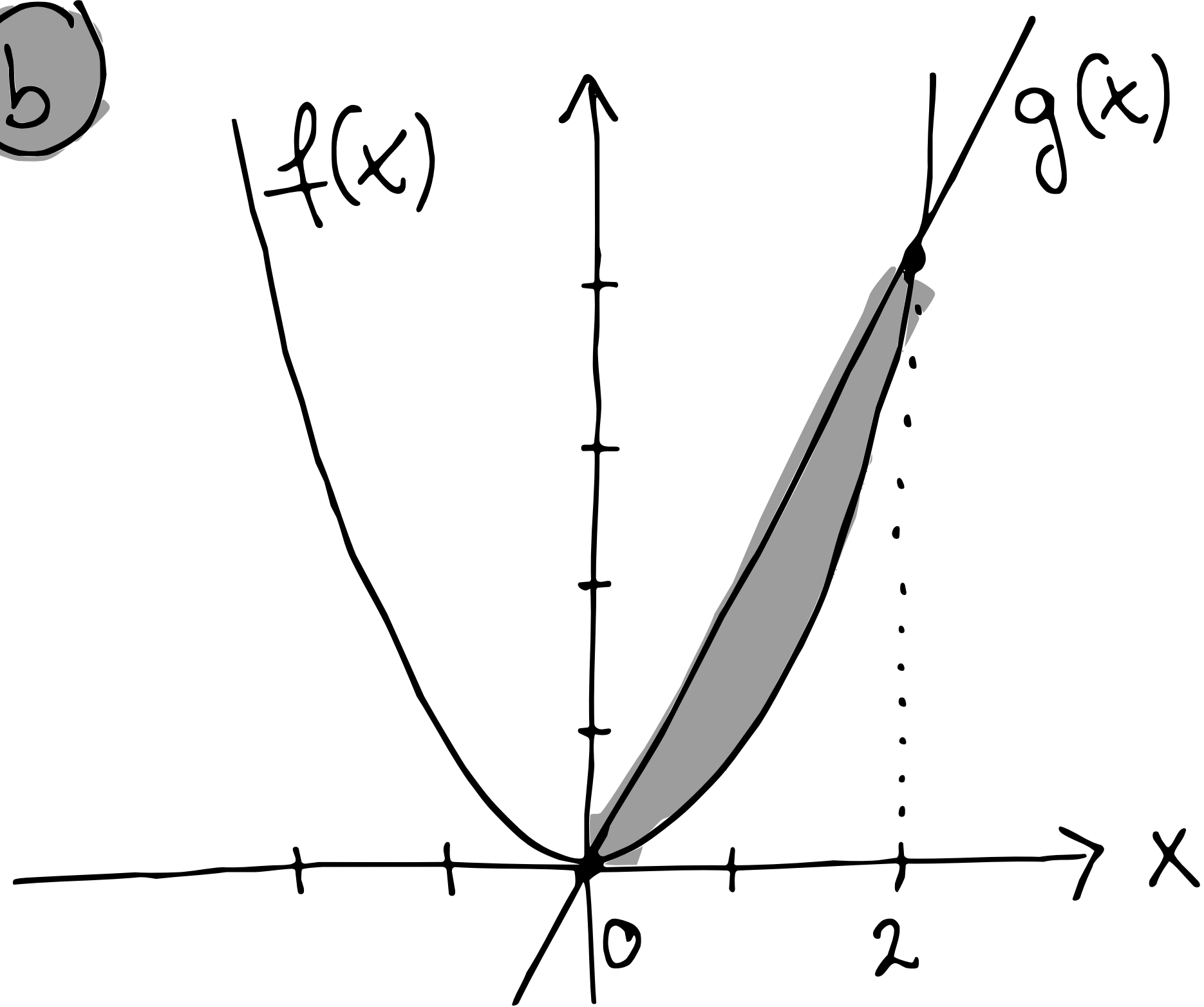


Szerecséné az $f(x) = \frac{2}{x}$ függvény pozitív
 az $[1, 3]$ intervallumon, így az általa és
 az x -tengely által körbezárt terület:

$$\int_1^3 \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln(x) \right]_{x=1}^{x=3} = 2 \ln(3) - 2 \ln(1)$$

$$= 2 (\ln(3) - \ln(1)) = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{1}\right) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

b)



$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = 2x$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

Mivel $[0, 2]$ -n $g(x) \geq f(x)$, ezért a
 terület

$$\int_0^2 g(x) - f(x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{3}$$

c) Amennyiben egy görbe koordinátái egy $t \in [t_0, t_1]$ paraméterrel vannak leírva $(x(t), y(t))$, akkor a görbe és az x -tengely által körzárant előjelt terület:

$$\int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t) dt$$

A feladatban:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2t \\ y(t) = t^3 \end{array} \right\}, \text{ ahol } t \in [0, 1]$$

A terület ekkor

$$\int_0^1 t^3 \cdot 2 dt = \left[\frac{1}{2} \cdot t^4 \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

d) A síkon egy görbe pontjait le tudjuk írni polárkoordinátáikkal

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(t) \\ y(t) &= r(t) \sin(t) \end{aligned} \right\} t \in [t_0, t_1],$$

ahol t a pont által bezárt szög,
továbbá $r(t)$ az origótól való távolság.

Egy általános görbe esetén a meghatározott terület:

$$\int_{t_0}^{t_1} |y(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot y'(t)| dt.$$

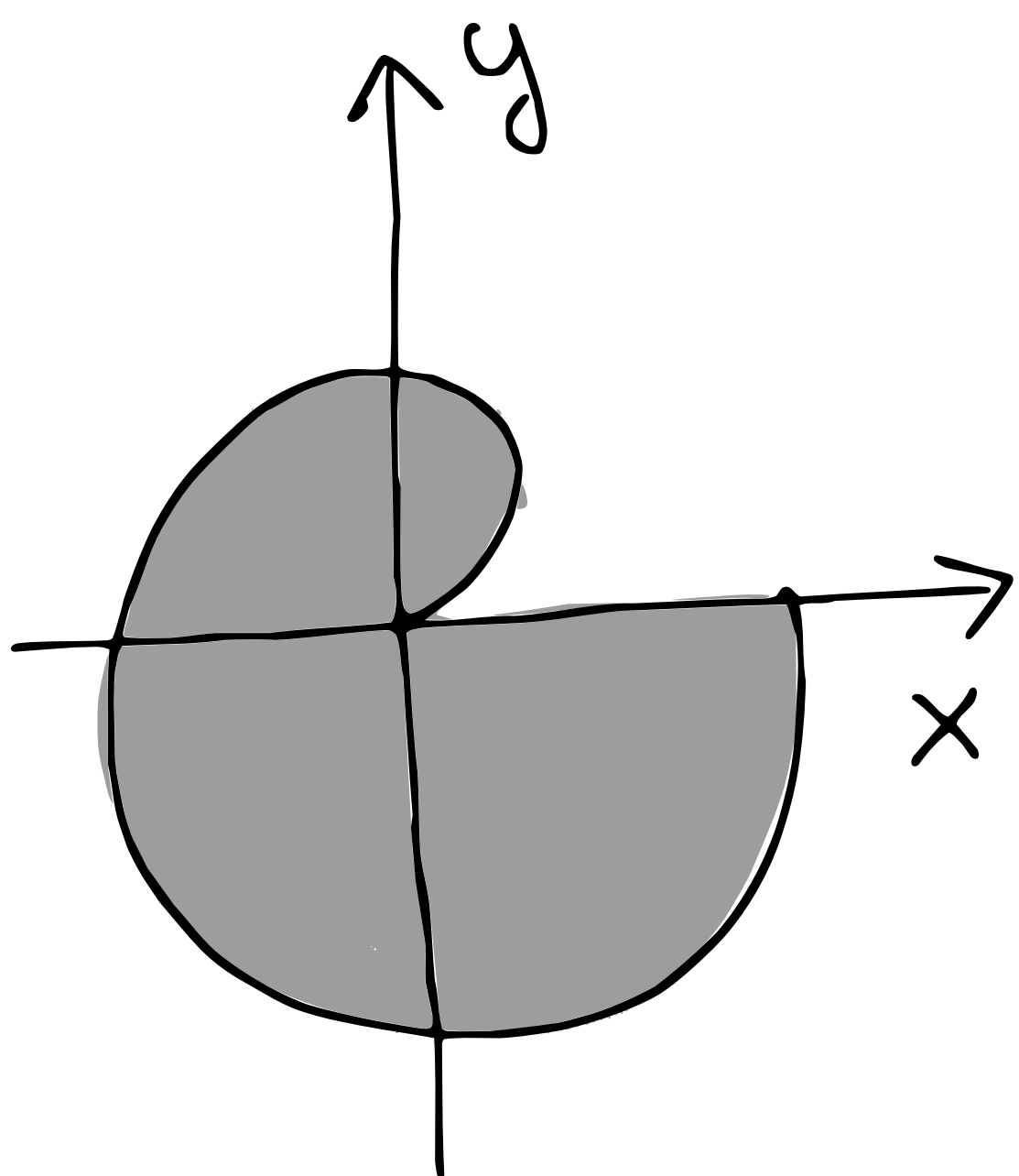
Amennyiben polárkoordinátákkal van

$$\int_{t_0}^{t_1} r^2(t) dt.$$

A felületen szereplő görbe

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= r \cos(t) \\ y(t) &= r \sin(t) \end{aligned} \right\} \text{ ahol } t \in [0, 2\pi]$$

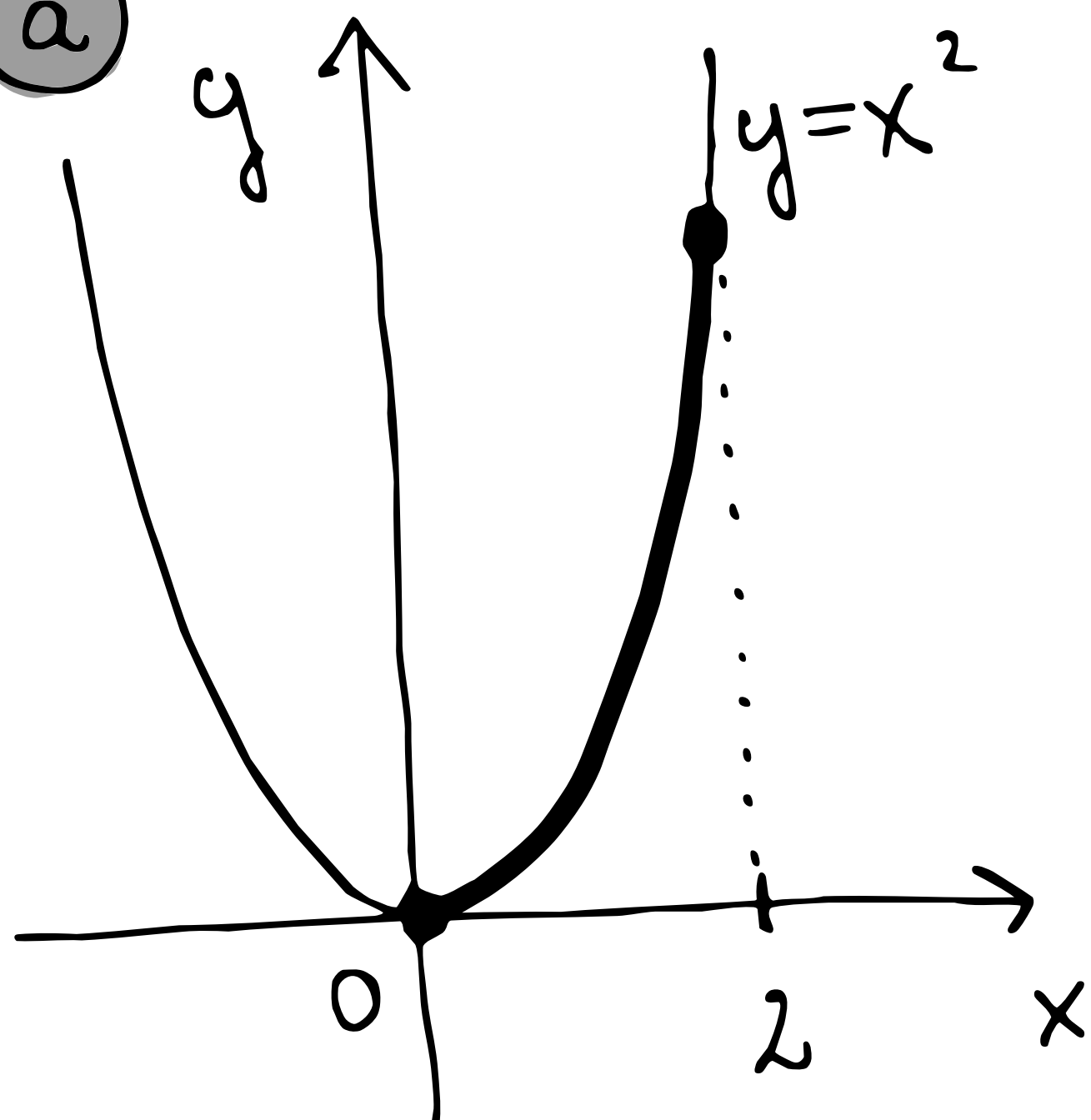
E_2 polárkoordináták alak. Suru a terület:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

3.

a



Keressük az ívhossz Descartes koordinátás képletét:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx =$$

(itt $f(x) = x^2$)

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Számítsuk ki a határozatlan integrált:

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \text{Legyen } 2x = \text{sh}(t), \text{ amiből}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\text{sh}(t)}{2} = \frac{\text{ch}(t)}{2}$$

$$= \int \sqrt{1 + \text{sh}^2(t)} \cdot \frac{\text{ch}(t)}{2} dt =$$

Keressük az alábbiakat:

$$(1) \text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1$$

$$(2) \text{ch}^2(t) + \text{sh}^2(t) = \text{ch}(2t)$$

Az (1)-es mellett $1 + \operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t)$, így

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{\operatorname{ch}^2(t)} \operatorname{ch}(t) dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch}^2(t) dt =$$

Most (1)-et és (2)-et összeadva $2\operatorname{ch}^2(t) = 1 + \operatorname{ch}(2t)$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2t) dt = \int \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{ch}(2t) dt =$$

$$= \frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sh}(2t)}{8} + c = \frac{t}{4} + \frac{2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{8} + c =$$

$\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$

$$= \frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{4} + c =$$

Nehézebb $2x = \operatorname{sh}(t) \leadsto t = \operatorname{arsh}(2x)$.

$$= \frac{\operatorname{arsh}(2x)}{4} + \frac{2x \operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(2x))}{4} + c =$$

$\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$

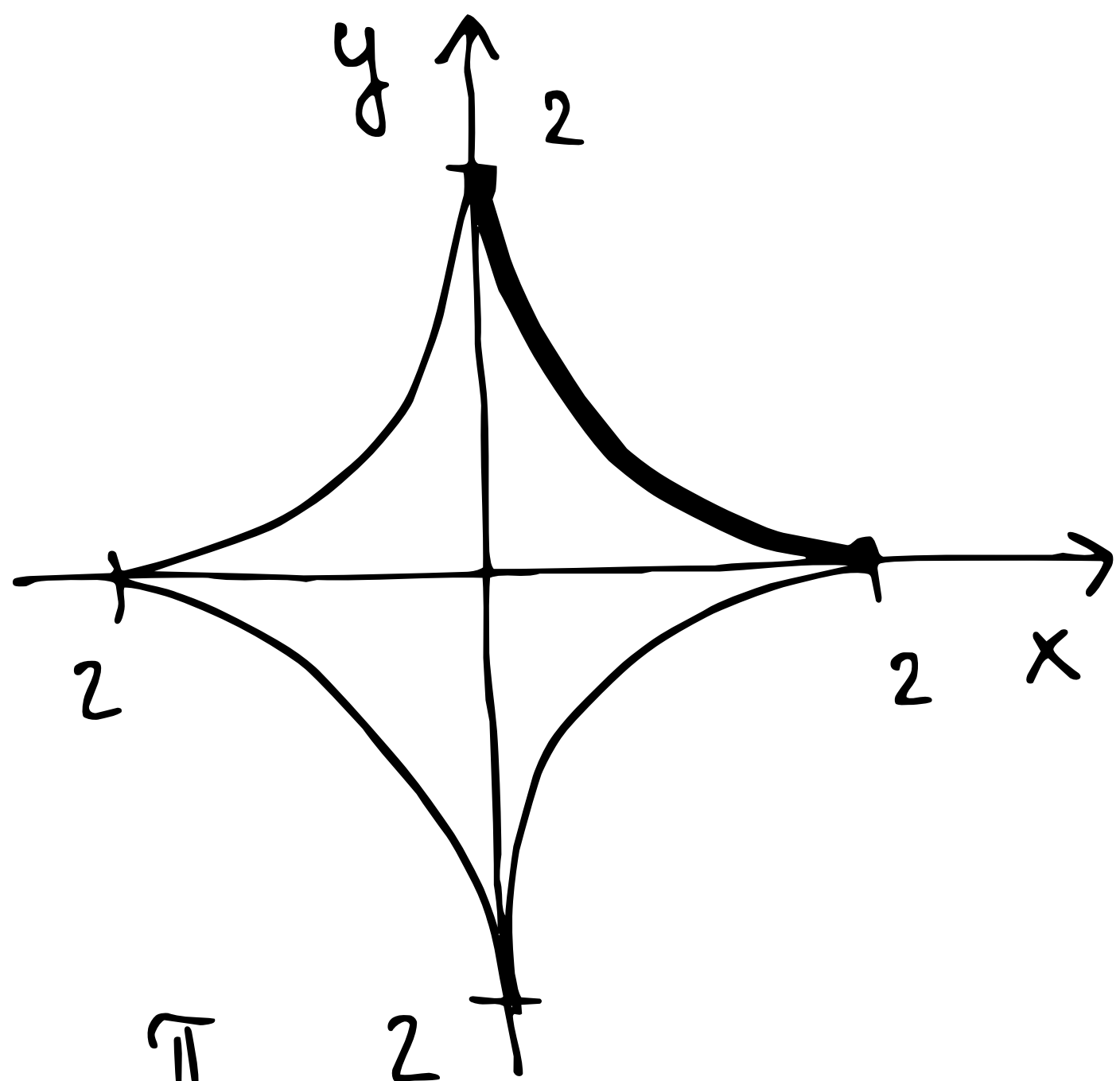
$$= \frac{\operatorname{arsh}(2x)}{4} + \frac{2x\sqrt{1+4x^2}}{4} + c.$$

Az előzőt innen

$$= \left[\frac{\operatorname{arsh}(2x)}{4} + \frac{2x\sqrt{1+4x^2}}{4} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{\operatorname{arsh}(4)}{4} + \frac{8\sqrt{65}}{4}$$

6

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 2\sin^3(t) \\ y(t) &= 2\cos^3(t) \end{aligned} \right\}, \text{ ahol } t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



Kiszámítjuk a paraméteres görbe ívhosszára vonatkozó képletet.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$= \int_{0 \neq \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[2 \cdot 3 \sin^2(t) \cos(t)\right]^2 + \left[2 \cdot 3 \cos^2(t) (-\sin(t))\right]^2} dt$$

$$= \int_{0 \neq \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36 \sin^4(t) \cos^2(t) + 36 \cos^4(t) \sin^2(t)} dt =$$

$$= \int_{0 \neq \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6 \sqrt{\sin^2(t) \cos^2(t) \cdot \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_1} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(t) \cos^2(t)} dt = 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t) \cos(t)| dt = \\
 &= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) dt =
 \end{aligned}$$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -n nemme-
gatho a függvény

Számítsuk ki a határozatlan integrált:

$$\int \sin(t) \cos(t) dt$$

Az $u = \sin(t)$ helyettesítéssel $\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$

innen pedig $du = \cos(t) dt$, ezért

$$\int \sin(t) \cos(t) dt = \int u du = \frac{u^2}{2} + C =$$

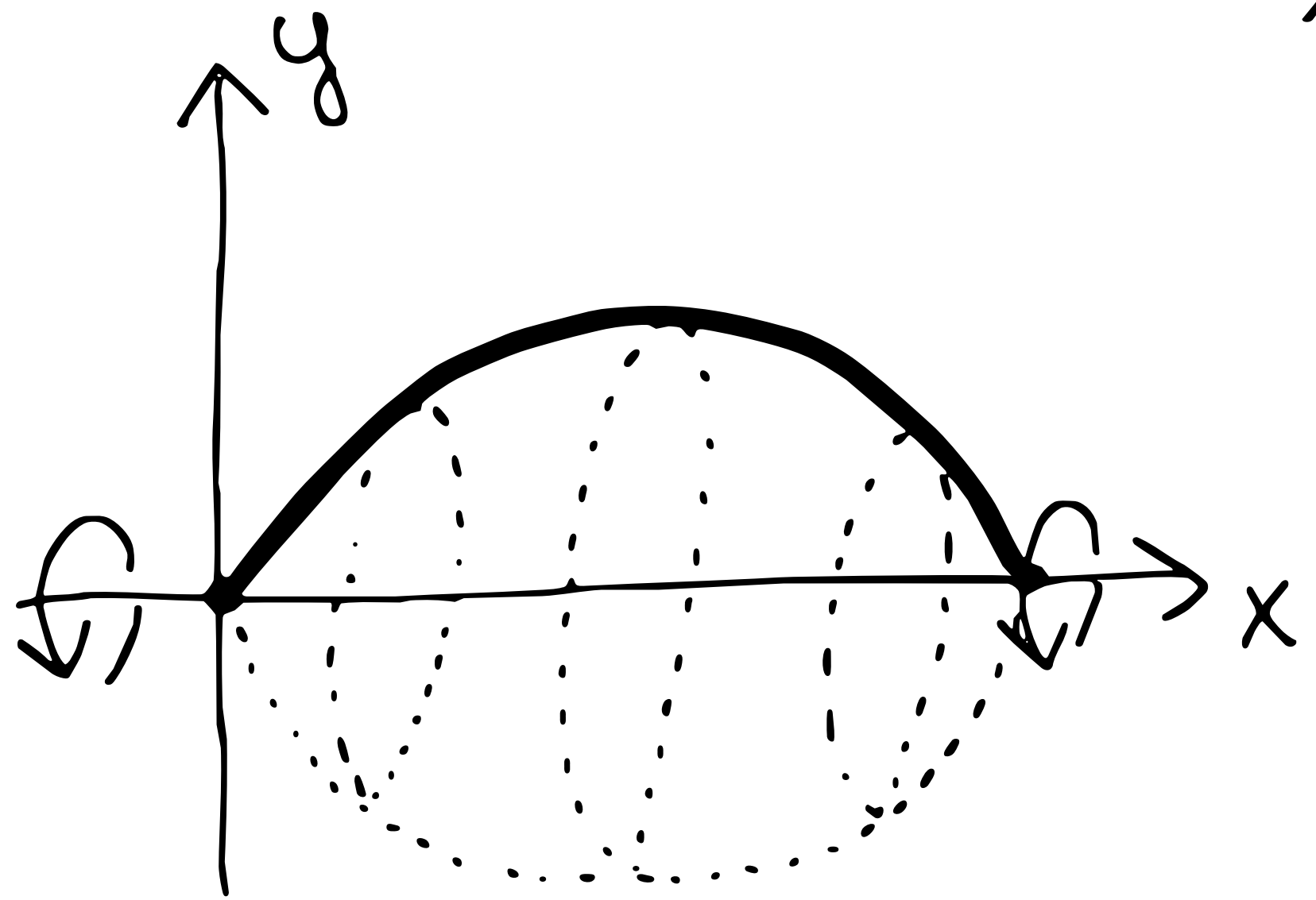
$$= \frac{\sin^2(t)}{2} + C$$

Az érkezőn innen

$$= 6 \cdot \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 3$$

4.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin(t) \\ y(t) &= 1 - \cos(t) \end{aligned} \right\}, \text{ ahol } t \in [0, 2\pi]$$



Keméljünk a paraméteres görbe tényleg a vonatkozó képletet:

$$\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} [1 - \cos(t)]^2 \cdot [1 - \cos(t)] dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3 dt$$

A határozatlan integrál

$$\int (1 - \cos(t))^3 dt =$$

$$= \int 1 - 3 \cos(t) + 3 \cos^2(t) - \cos^3(t) dt$$

A négyzetes és köbös tagot máruntuk hi
hírlön - hírlön.

$$\bullet \int \cos^2(t) dt =$$

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$\begin{array}{r} \oplus \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t) \\ \hline 2 \cdot \cos^2(t) = 1 + \cos(2t) \end{array}$$

$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + C$$

$$\bullet \int \cos^3(t) dt = \int \cos(t) (1 - \sin^2(t)) dt =$$

$$= \int \cos(t) - \cos(t) \sin^2(t) dt =$$

$$= \sin(t) - \frac{\sin^3(t)}{3} + C$$

A teljes integrál értéke ekkor:

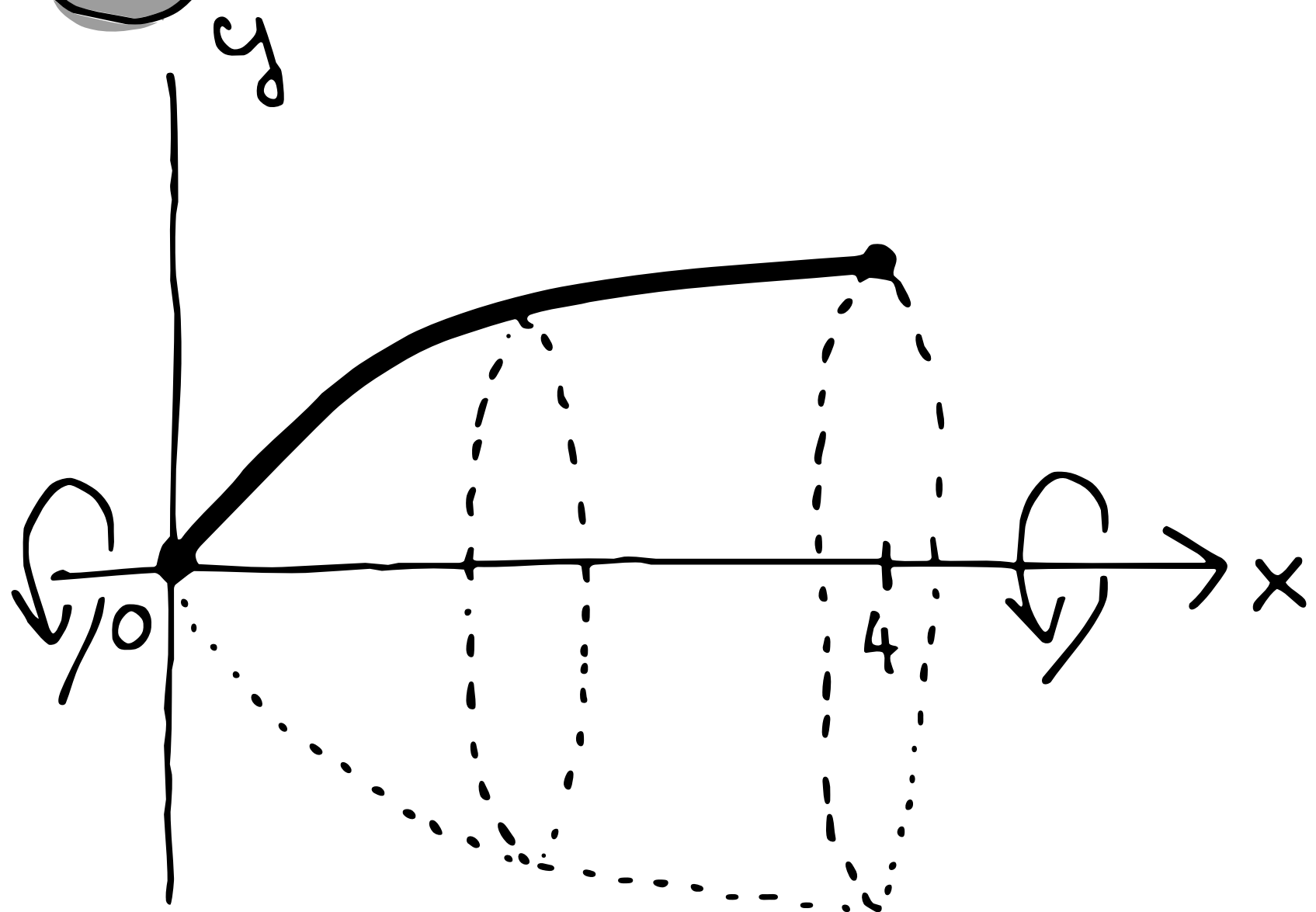
$$\begin{aligned} \int 1 - 3 \cos(t) + 3 \cos^2(t) - \cos^3(t) dt &= \\ &= t - 3 \sin(t) + 3 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) + \\ &\quad - \left(\sin(t) - \frac{\sin^3(t)}{3} \right) + C = \\ &= \frac{5}{2} t - 4 \sin(t) + \frac{3}{4} \sin(2t) - \frac{1}{3} \sin^3(t) + C \end{aligned}$$

A terület innen:

$$\pi \left[\frac{5}{2} t - 4 \sin(t) + \frac{3}{4} \sin(2t) - \frac{1}{3} \sin^3(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 5\pi^2.$$

5.



Használjuk a felület
Descartes koordinátás
képletét.

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx$$

Mivel a határozatlan integrál értéke

$$\int \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = \int \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

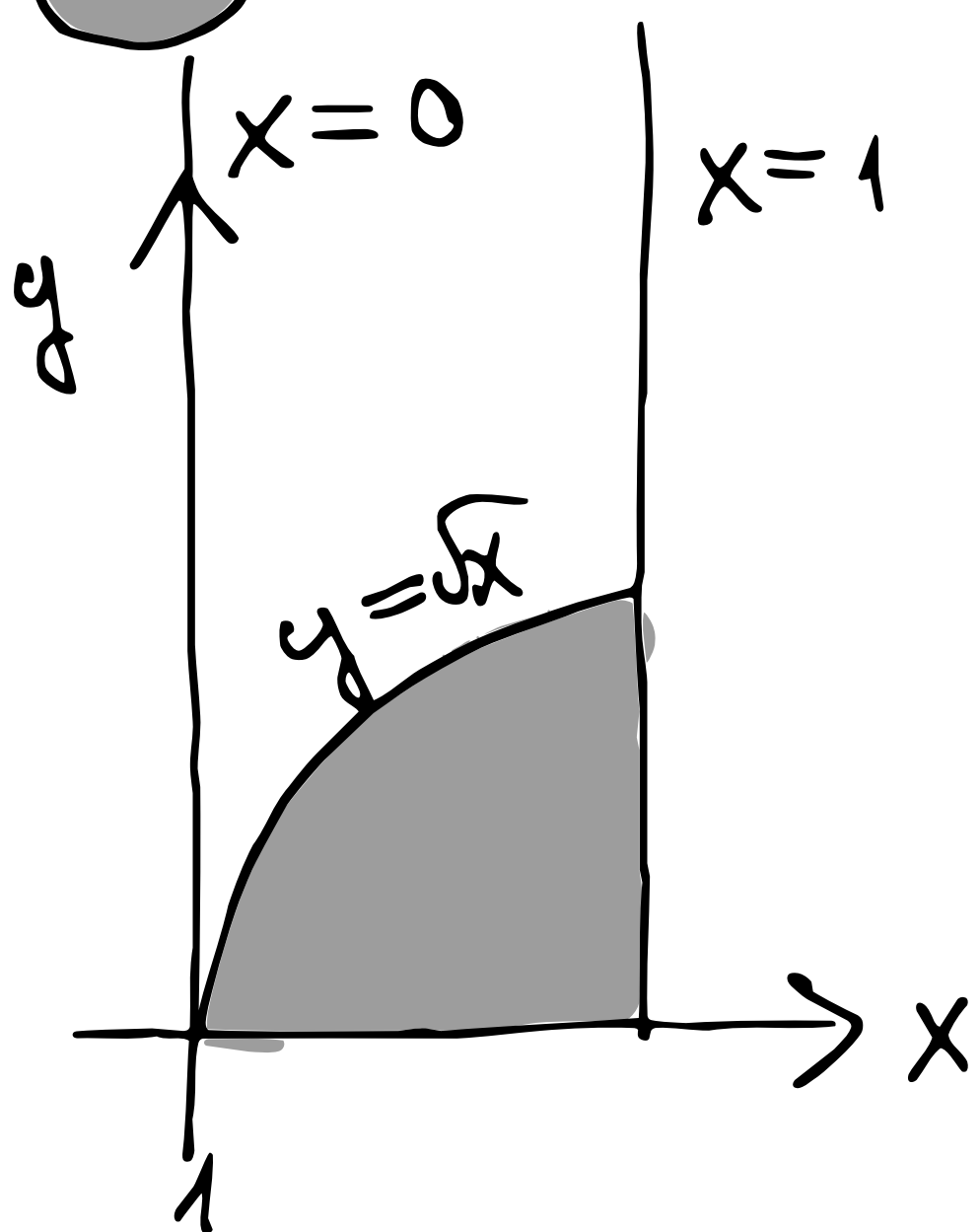
A felület innen

$$2\pi \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^3} \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{21\sqrt{21}}{8} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$\frac{21\sqrt{21} - 1}{6} \cdot \pi$$

6.



A súlypont x -koordinátája:

 $x_s =$

$$\frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} =$$

$$= \frac{\int_0^1 x \cdot \sqrt{x} dx}{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = \frac{\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{x=1}}{\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

A súlypont y -koordinátája:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 x dx}{\frac{2}{3}} = \frac{\left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

A lemez súlypontja tehát

$$S\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{8}\right)$$

