

A csoport

1. (4p)

$$a_n = \left(\frac{5+3n}{3(n+1)} \right)^{4-2n} = \left(\frac{3n+5}{3n+3} \right)^{4-2n}$$

$$= \left(\frac{(3n+3)+2}{3n+3} \right)^{4-2n} = \left(1 + \frac{2}{3n+3} \right)^{4-2n}$$

Egy $(1+c_n)^{b_n}$ típusú sorozat, ahol

$$b_n = 4-2n \quad \text{és} \quad c_n = \frac{2}{3n+3}.$$

Mivel

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4-2n = -\infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (4-2n) \cdot \frac{2}{3n+3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-4n}{3n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \frac{1}{n} - 4}{3 + 3 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{0-4}{3-0} = -\frac{4}{3},$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-\frac{4}{3}}.$$

2. (5p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7^{x+1} - 7}{3x}, & \text{ha } x > 0 \\ 2x^2 - 3x + 5p, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

Mivel $f(x)$ a $(-\infty, 0)$ és $[0, \infty)$ intervallumokban folytonos, így elég $x=0$ helyen vizsgálni.

A helyettesítési érték $f(0) = 5p$.

A határértékek:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - 3x + 5p = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5p = 5p$$

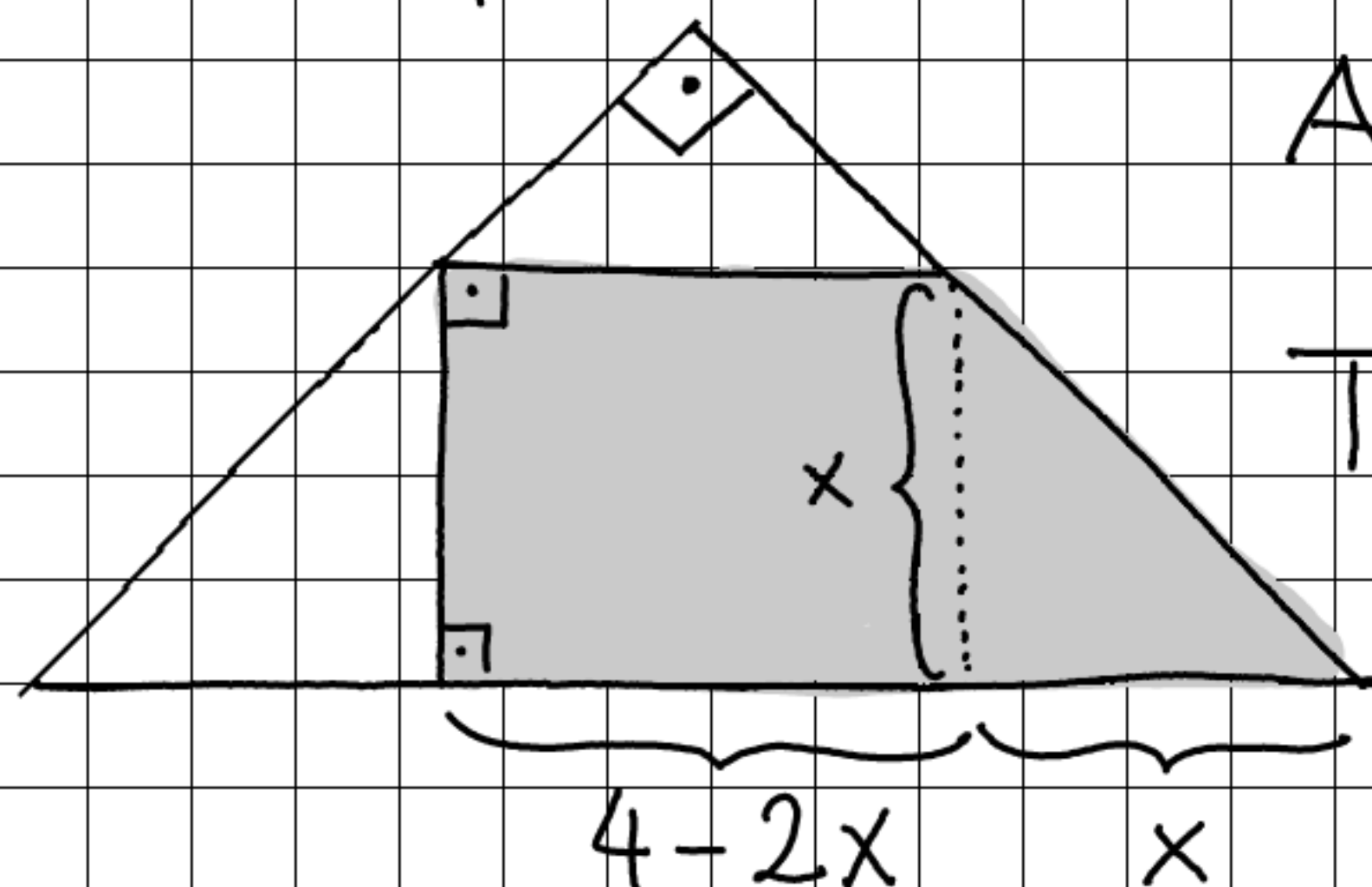
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7^{x+1} - 7}{3x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(7) 7^{x+1}}{3}$$

$$= \frac{\ln(7) 7^{0+1}}{3} = \frac{7 \ln(7)}{3}$$

Így az kell, hogy

$$5p = \frac{7 \ln(7)}{3} \Leftrightarrow p = \frac{7 \ln(7)}{15}$$

3. (5p)



A trapéz területe

$$T(x) = (4 - 2x)x + \frac{1}{2}x^2$$

$$T(x) = 4x - \frac{3}{2}x^2 \leadsto T'(x) = 4 - 3x$$

x	$(-\infty, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, +\infty)$
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	NÖ	MAX	CSÖKKEN

A terület maximális, ha $x = \frac{4}{3}$.

4. (4p)

A függvény:

$$f(x) = \ln(2+x)$$

A deriváltak:

$$f^{(0)}(x) = \ln(2+x) \leadsto f^{(0)}(0) = \ln(2)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2+x} \leadsto f^{(1)}(0) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} \leadsto f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(2+x)^3} \leadsto f^{(3)}(0) = \frac{1}{4}$$

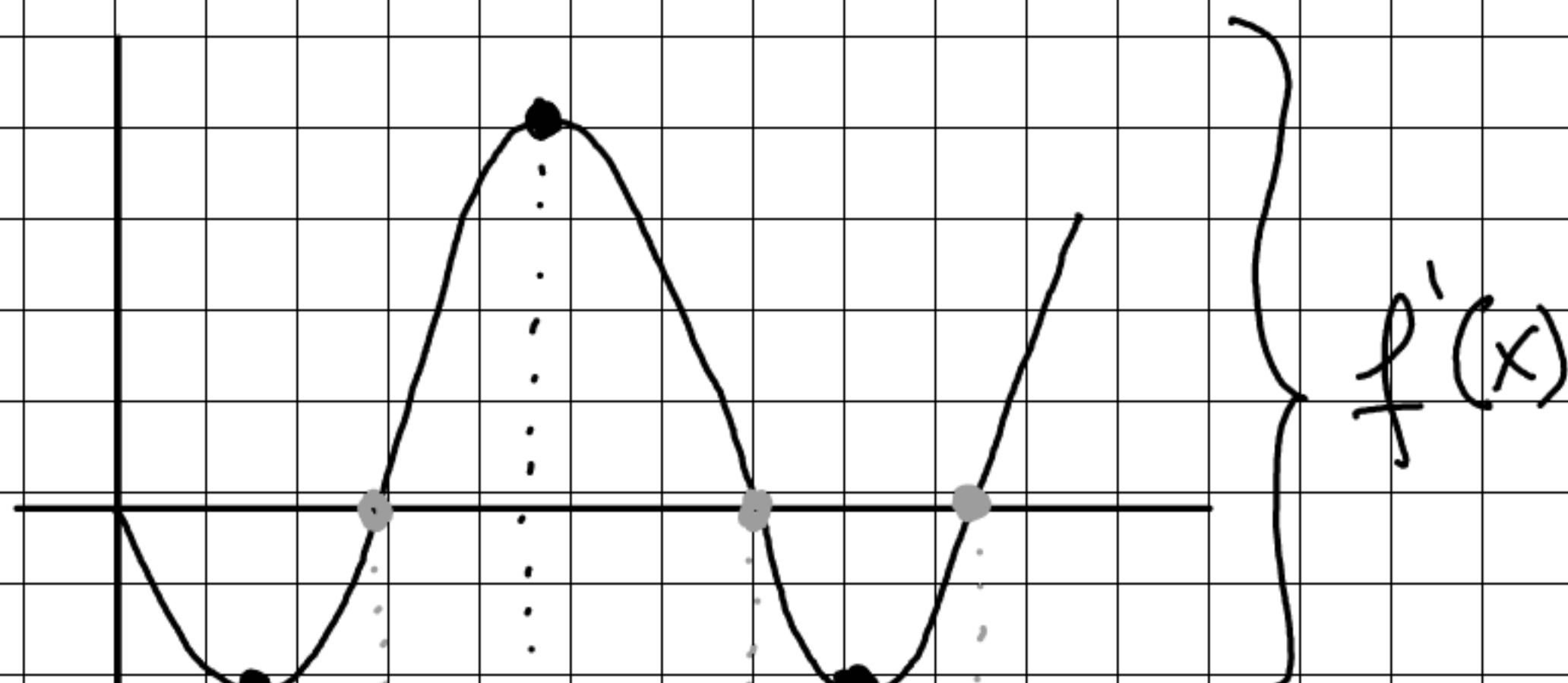
A harmadfokú Taylor-polinóm $x_0 = 0$ -ban

$$T_3(x) = \frac{\ln(2)}{0!} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{4}}{3!}x^3$$

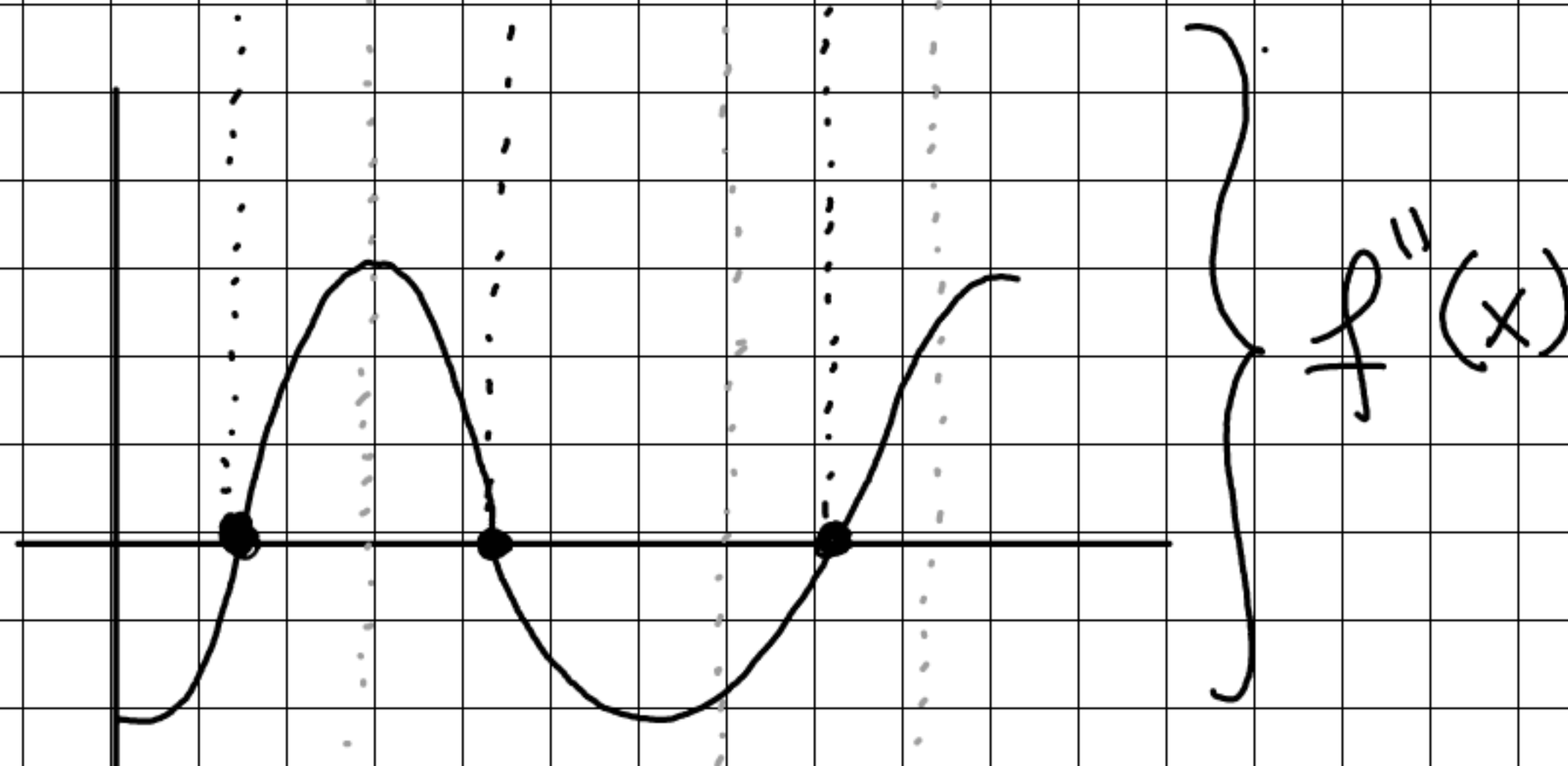
$$= \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3$$

5. (2p)

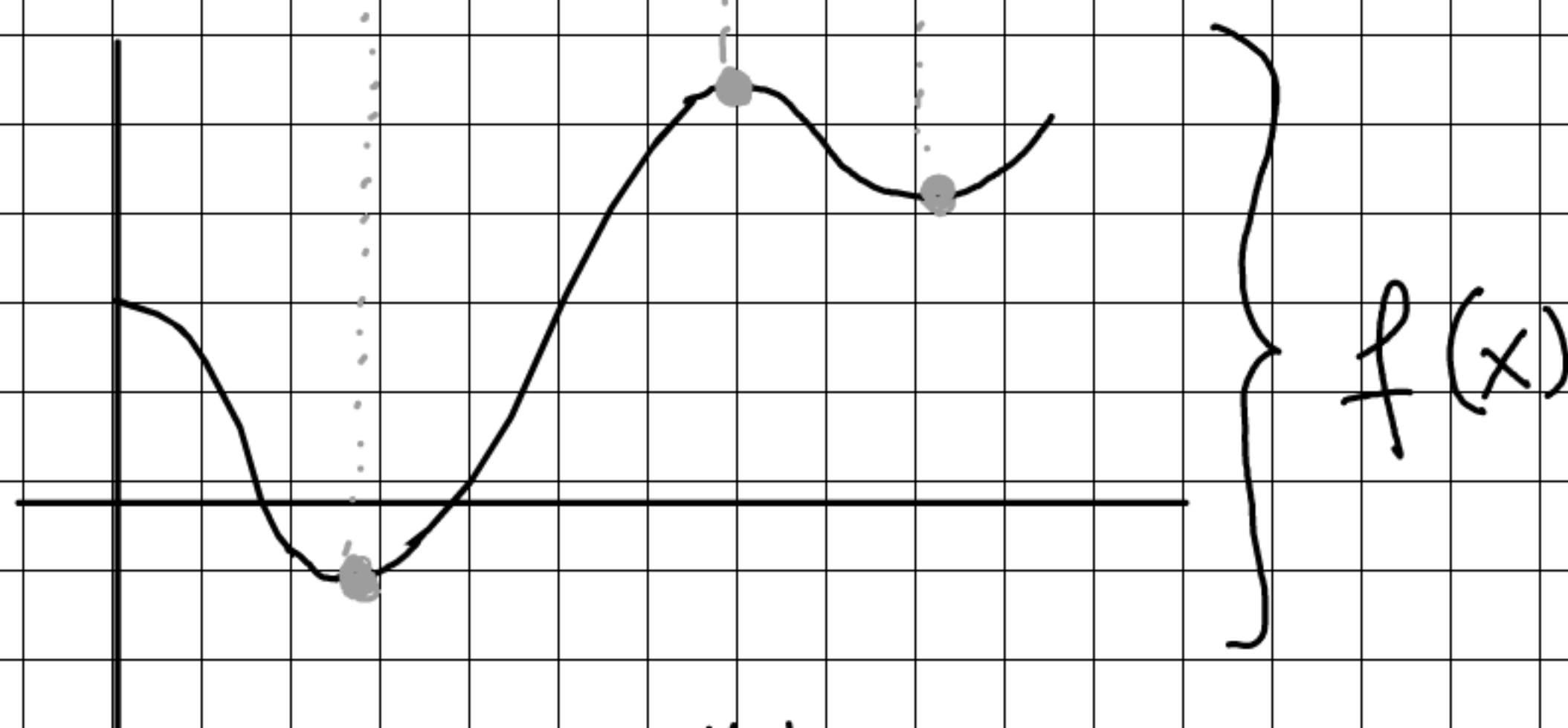
(1)



(2)



(3)



Ahol (3)-asnak szélsőértékei vannak ott vannak az (1)-es zérushelyei ($\bullet$), így (1)-es a (3)-as deriváltja.

Ahol (1)-esnek szélsőértékei vannak ott vannak az (2)-es zérushelyei ($\bullet$), így (2)-es a (1)-es deriváltja.

B csoport

1. (4p)

$$a_n = \left(\frac{1+2n}{2(n+2)} \right)^{5-3n} = \left(\frac{2n+1}{2n+4} \right)^{5-3n}$$

$$= \left(\frac{(2n+4)-3}{2n+4} \right)^{5-3n} = \left(1 + \frac{-3}{2n+4} \right)^{5-3n}$$

Egy $(1+c_n)^{b_n}$ típusú sorozat, ahol

$$b_n = 5-3n \quad \text{és} \quad c_n = \frac{-3}{2n+4}.$$

Mivel

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5-3n = -\infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (5-3n) \cdot \frac{-3}{2n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-15}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-15 \cdot \frac{1}{n}}{2+4 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{9-0}{2+0} = \frac{9}{2}$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{9}{2}}.$$

2. (5p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-5^x}{x+x^2} & , \text{ ha } x > 0 \\ 5x^2 - 2x + 3p & , \text{ ha } x \leq 0 \end{cases}$$

Mivel $f(x)$ a $(-\infty, 0)$ és $[0, \infty)$ intervallumokban folytonos, így elég $x=0$ helyen vizsgálni.

A helyettesítési érték $f(0) = 3p$

A határértékek:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 5x^2 - 2x + 3p = 5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 3p = 3p$$

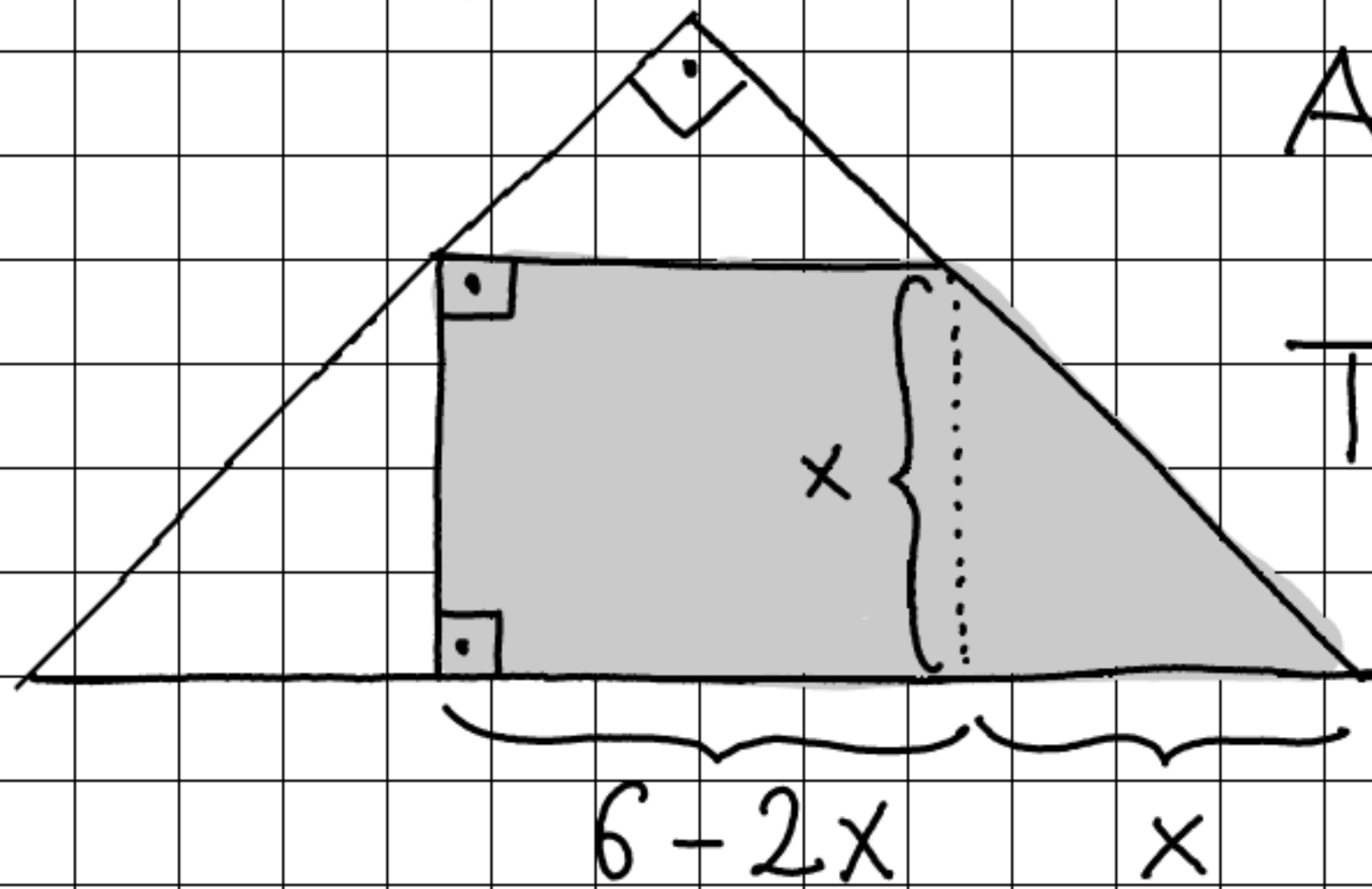
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-5^x}{x+x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\ln(5)5^x}{1+2x}$$

$$= \frac{-\ln(5)5^0}{1+2 \cdot 0} = -\ln(5)$$

Így az kell, hogy

$$3p = -\ln(5) \Leftrightarrow p = -\frac{\ln(5)}{3}$$

3. (5p)



A trapéz területe

$$T(x) = (6 - 2x)x + \frac{1}{2}x^2$$

$$T(x) = 6x - \frac{3}{2}x^2 \leadsto T'(x) = 6 - 3x$$

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	Nö	MAX	CSÖKKEN

A terület maximális, ha $x = 2$.

4. (4p)

A függvény:

$$f(x) = \ln(1-x)$$

A deriváltak:

$$f^{(0)}(x) = \ln(1-x) \leadsto f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{1-x} \leadsto f^{(1)}(0) = -1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \leadsto f^{(2)}(0) = -1$$

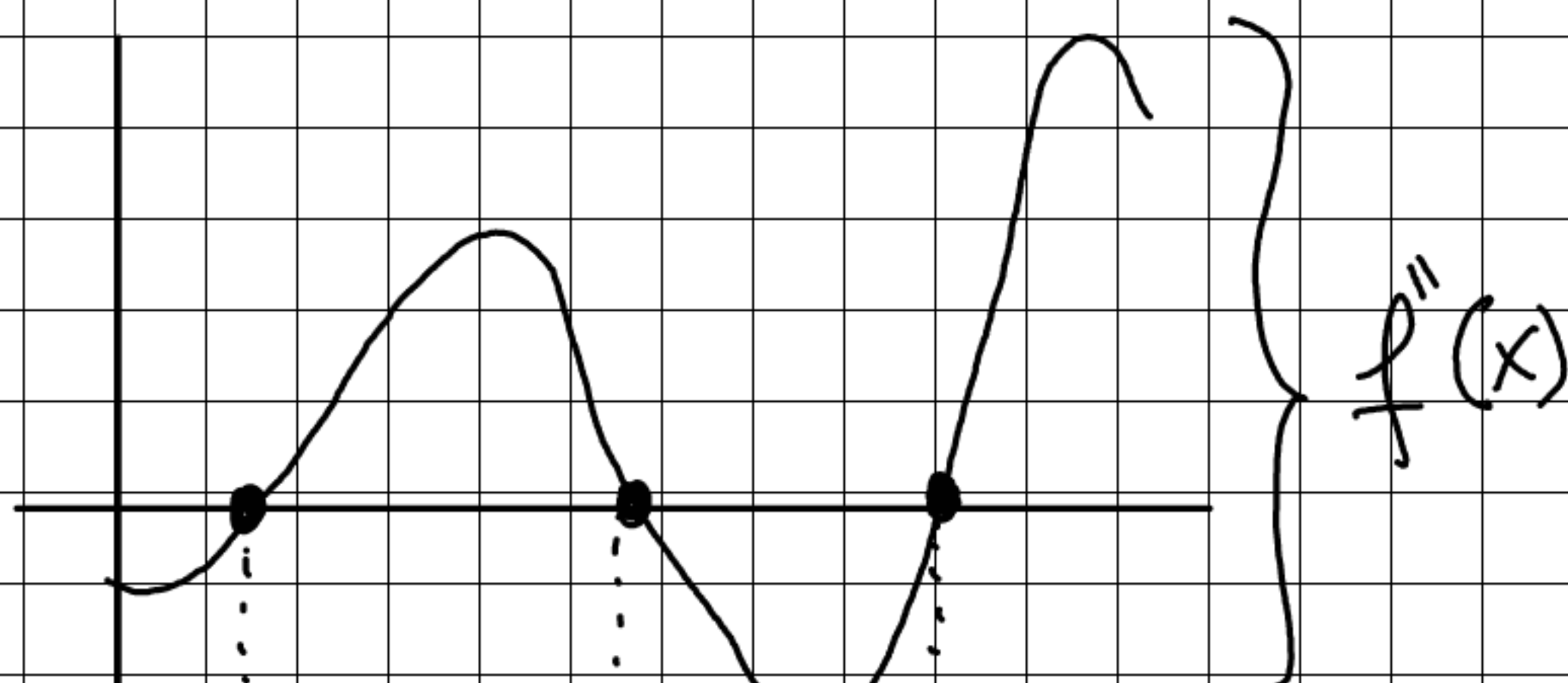
$$f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \leadsto f^{(3)}(0) = -2$$

A harmadfokú Taylor-polinóm $x_0 = 0$ -ban

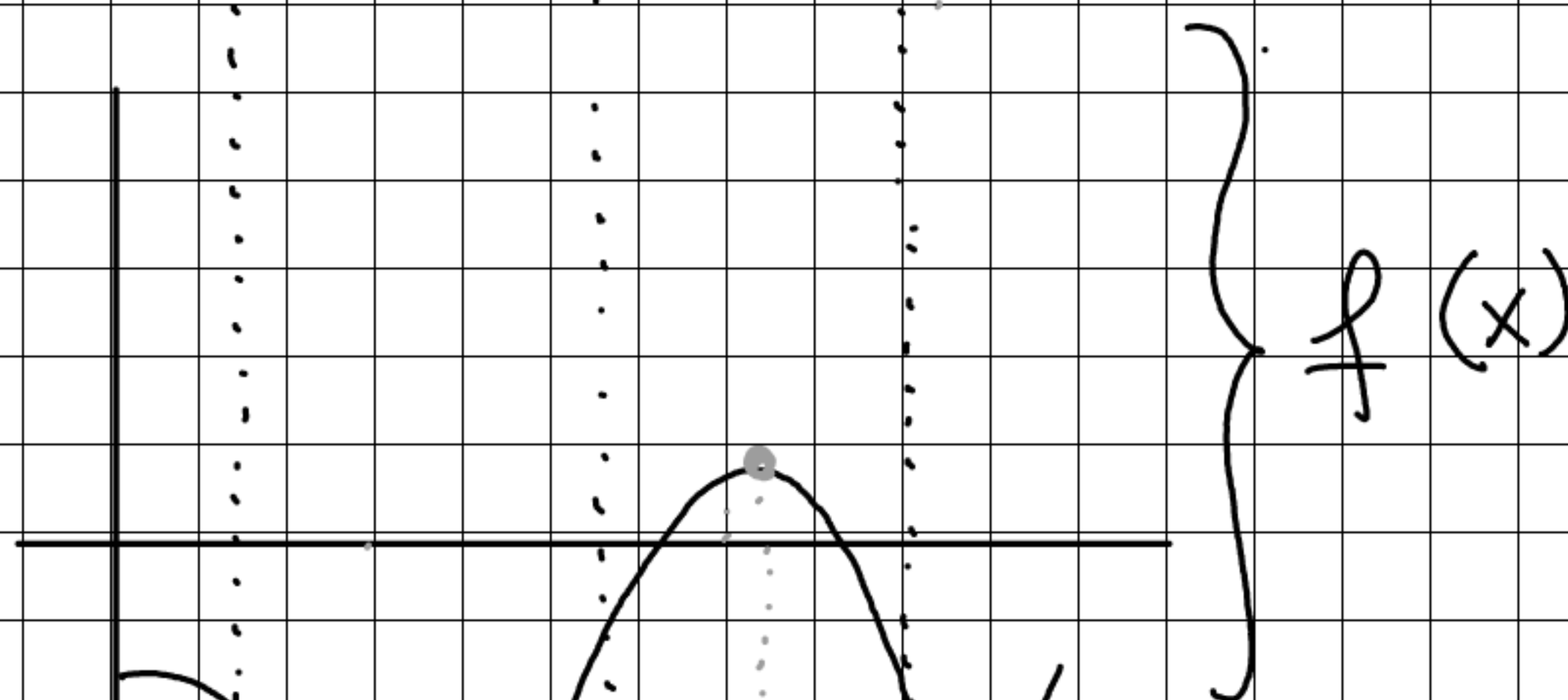
$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{0}{0!} + \frac{-1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

5. (2p)

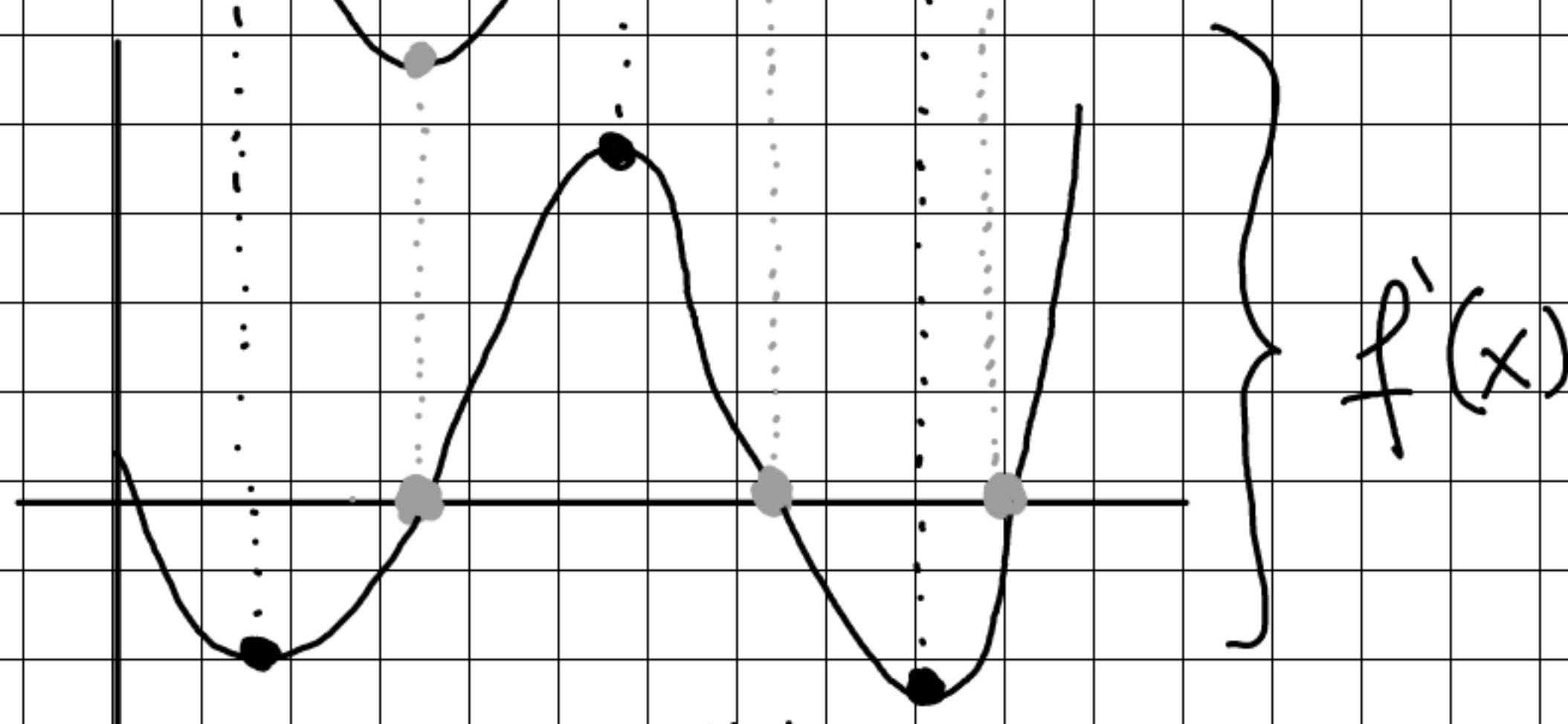
(1)



(2)



(3)



Ahol (2)-esnek szélsőértékei vannak ott vannak az (3)-as zérushelyei (•), így (3)-as a (2)-es deriváltja.

Ahol (3)-asnak szélsőértékei vannak ott vannak az (1)-es zérushelyei (•), így (1)-es a (3)-as deriváltja.