1. Legyen $y(t)$ a t időpontban (perc) a tartályban lévő víz mennyisége (kg). Egy kis Δt idő alatt a só mennyisége növekszik

$$0.25 \cdot 2 \cdot \Delta t$$

mennyiséggel.
Ugyanezalatt az idő alatt a tartályban lévő sóból kifolyik

$$\frac{y(t)}{10} \cdot 2 \Delta t$$

mennyiségű só.

Az alábbi egyenlet adódik
$$y(t+\Delta t) - y(t) = \frac{1}{2}\Delta t + \frac{1}{5} y(t) \Delta t,$$

amiből
$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} y(t).$$
Innen $\Delta t \to 0$ határmenettel
$$y'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} y(t).$$

A nulladik pillanatban nincsen só a tartályban, ezért $y(0)=0$.

2.

a) $y' = 3(x-1)^2 y \leftarrow$ $y \equiv 0$ egy jó megoldás

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3(x-1)^2$$

$$\int \frac{1}{y} y' \, dx = \int 3(x-1)^2 \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int 3(x-1)^2 \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int 3(x-1)^2 \, dx$$

$$\ln(|y|) = (x-1)^3 + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{(x-1)^3} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{(x-1)^3}$$

$$\boxed{y = c \cdot e^{(x-1)^3}}$$

b

$$y' = \frac{y^4}{3} \leftarrow y \equiv 0 \text{ egy jó megoldás}$$

$$\frac{1}{y^4} \cdot y' = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{1}{y^4} \cdot y' \, dx = \int \frac{1}{3} \, dx$$

$$\int y^{-4} \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int \frac{1}{3} \, dx$$

$$\int y^{-4} \, dy = \int \frac{1}{3} \, dx$$

$$-\frac{1}{3} y^{-3} = \frac{1}{3} x + c_1$$

$$y^{-3} = -x \underbrace{- 3c_1}_{c}$$

$$y^3 = \frac{1}{c - x}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[3]{c - x}}}$$

c $\quad y' = (y^2+1)e^{-2x} \Leftarrow y^2+1 \equiv 0$ -nak nincs megoldása

$$\int \frac{y'}{y^2+1}\,dx = \int e^{-2x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int e^{-2x}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(y) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y)) = \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)}$$

d

$$\frac{y'}{x} = \frac{\sin(x)}{\cos(y)} \leftarrow \frac{1}{\cos y} \equiv 0\text{-nak nincs megoldása}$$

$$\int \cos(y)\, y'\, dx = \int \sin(x) \cdot x \, dx$$

$$\int \cos(y)\, dy = \underbrace{\int \sin(x) \cdot x \, dx}_{\| \text{ parciálisan}}$$

$$-\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x)\, dx = \sin(x) - \cos(x)\, x + c,$$

vagyis

$$\sin(y) = \sin(x) - \cos(x) \cdot x + c$$

$$\arcsin(\sin(y)) = \arcsin(\sin(x) - \cos(x) \cdot x + c)$$

$$\boxed{y = \arcsin(\sin(x) - \cos(x) \cdot x + c)}$$

e $y^2-1=(2y+xy)y'$

$$y' = \frac{y^2-1}{2y+xy}$$

$$y' = \frac{y^2-1}{2y}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}x} \leftarrow y\equiv\pm 1$$

jó megoldások

$$\int \frac{2y}{y^2-1}\cdot y'\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$\int \frac{2y}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$\ln(|y^2-1|) = 2\ln(|1+\tfrac{1}{2}x|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y^2-1|)} = e^{2\ln(|1+\frac{1}{2}x|)}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y^2-1| = c_2\cdot(1+\tfrac{1}{2}x)^2$$

$$y^2-1 = c\cdot(1+\tfrac{1}{2}x)^2$$

$$\boxed{y = \sqrt{c\cdot(1+\tfrac{1}{2}x)^2+1}}$$

f) $2(xy+x-y-1)=(x^2-2x)y'$

$$y'=\frac{2(xy+x-y-1)}{x(x-2)}$$

$$y'=\frac{2(x-1)(y+1)}{x(x-2)} \leftarrow y\equiv -1 \text{ jó megoldás}$$

$$\int \frac{y'}{y+1}\,dx=\int \frac{2x-2}{x^2-2x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy=\int \frac{2x-2}{x^2-2x}\,dx$$

$$\ln(|y+1|)=\ln(|x^2-2x|)+c_1$$

$$e^{\ln(|y+1|)}=e^{\ln(|x^2-2x|)}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y+1|=c_2\cdot|x^2-2x|$$

$$y+1=c_3\cdot(x^2-2x)$$

$$\boxed{y=c_3(x^2-2x)-1}$$

3.

a) $(x + xy^2)y' = 3$

$$(1+y^2)xy' = 3$$

$$(1+y^2)y' = \frac{3}{x}$$

$$\int 1+y^2 \, dy = \int \frac{3}{x} \, dx$$

$$y + \frac{1}{3}y^3 = 3\ln(x) + c$$

A feladat csak implicit alakot kért y-ra, így nem kell kifejezni x segítségével, elég a fenti összefüggés.

(b) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$

$$yy' = (x^2+4)(y-1)$$

$$\frac{y}{y-1}\, y' = x^2+4$$

$$\int \frac{y}{y-1}\, dy = \int x^2+4\, dx$$

$$\int \frac{y-1+1}{y-1}\, dy = \int x^2+4\, dx$$

$$\int 1+\frac{1}{y-1}\, dy = \int x^2+4\, dx$$

$$y + \ln(|y-1|) = \frac{1}{3}x^3 + 4x + c$$

4.

a) $(x+1)y' = y-2$ és $y(-3)=1$

$$\int \frac{y'}{y-2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y-2}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\ln(|y-2|) = \ln(|x+1|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y-2|)} = e^{\ln(|x+1|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y-2| = c_2 \cdot |x+1|$$

$$y-2 = c_2(x+1)$$

$$y = 2 + c_2(x+1).$$

Ilyen egy általános megoldás, de nekünk az kell, amire $y(-3)=1$.

$$1 = 2 + c_2(-3+1) \iff c = \frac{1}{2},$$

vagyis a megoldás

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

b) $y \cdot y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ és $y(1) = 1$

$$\int y \cdot y' \, dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$$

$$\int y \, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \ln(1+e^x) + c_1$$

$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + \underbrace{2c_1}_{c}$$

$$y = \sqrt{2\ln(1+e^x) + c}\,.$$

A feltétel miatt

$$1 = \sqrt{2\ln(1+e) + c} \iff c = 1 - 2\ln(1+e)$$

A megoldás innen

$$\boxed{y = \sqrt{2\ln(1+e^x) - 2\ln(1+e) + 1}}$$

c) $(x^2-1)y' = xy$ és $y(\sqrt{2}) = -1.$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

$$\ln(|y|) = \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \sqrt{|x^2-1|}$$

$$y = c\sqrt{|x^2-1|}$$

A feltétel miatt ekkor

$$-1 = c\cdot\sqrt{|\sqrt{2}^2-1|} \iff c = -1$$

A megoldás

$$\boxed{y = -\sqrt{|x^2-1|}}$$

d) $y\ln(y)\,dx + x\,dy = 0$ és $y(1)=1$

$$y \cdot \ln(y) = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$y \cdot \ln(y) = x \cdot y'$$

$$\int \frac{y'}{y \cdot \ln(y)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y \cdot \ln(y)}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln(|\ln(y)|) = \ln(x) + c_1$$

$$e^{\ln(|\ln(y)|)} = e^{\ln(|x|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|\ln(y)| = c_2|x|$$

$$\ln(y) = c \cdot x$$

$$e^{\ln(y)} = e^{c \cdot x}$$

$$y = e^{c \cdot x}$$

A feltétel szerint

$$1 = e^c \iff c = 0$$

A megoldás innen

$$\boxed{y = 1}.$$

5. $y' = 3(x-1)^2 y$ és $y(1) = 1$.

$$\frac{y'}{y} = 3(x-1)^2$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 3(x-1)^2\,dx$$

$$\ln(|y|) = (x-1)^3 + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{(x-1)^3} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{(x-1)^3}$$

$$y = c \cdot e^{(x-1)^3}$$

Az $y(1)=1$ feltétel miatt:

$$1 = c\cdot e^{(1-1)^3} = c\cdot e^0 = c$$

Az egyenlet megoldása

$$y = e^{(x-1)^3}.$$

Ez az $x=2$ helyen az

$$y(2) = e^{(2-1)^3} = e$$

értéket veni fel.

6. $y' = (y^2+1)e^{-2x}$ és $y(0)=0$.

$$\frac{y'}{y^2+1} = e^{-2x}$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int e^{-2x}\,dx$$

$$\mathrm{arctg}(y) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y)) = \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$y = \operatorname{tg}\left(c - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

Az $y(0) = 0$ feltétel miatt

$$\operatorname{arctg}(0) = c - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0}$$

$$0 = c - \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

A feladat megoldása

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)\right)$$

Ez az $x = 1$ helyen a következő értéket veszi fel

$$y(1) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)\right).$$

7. Amennyiben $y(t)$ jelöli a feloldódott anyag mennyiségét t idő (perc) alatt, akkor tudjuk, hogy

$$\frac{dy}{dt} = (8-y)$$

teljesül. Vagyis az alábbi differenciálegyenlethez jutunk

$$y' = (8-y).$$

Mivel a nulladik percben nem oldódott fel anyag, így az alábbi kezdetiérték feltételünk adódik

$$y(0) = 0.$$

Az egyenlet megoldása

$$y' = (8-y)$$

$$\frac{y'}{8-y} = 1$$

$$\int \frac{1}{8-y}\,dy = \int 1\,dt$$

$$-\ln(|8-y|) = t + c_1$$
$$\ln(|8-y|) = -t - c_1$$
$$e^{\ln(|8-y|)} = e^{-t} \cdot \underbrace{e^{-c_1}}_{c_2}$$

$$|8-y| = c_2 \cdot e^{-t}$$

$$8 - y = c_3 \cdot e^{-t}$$

$$y = 8 \underbrace{-\,c_3}_{c} \cdot e^{-t}$$

$$y = 8 + c \cdot e^{-t}$$

Az $y(0)=0$ feltétel miatt

$$0 = 8 + c \cdot e^{-0} \iff c = -8$$

A megoldás

$$y = 8(1 - e^{-t})$$

1 perc elteltével a feloldódott anyag mennyisége $y(1) = 8(1 - e^{-1}) \approx 5.06$ gramm.

8. A feladat szövege szerint a kapcsolódó differenciálegyenlet

$$y' = -k(y-20) \text{ és } y(0) = 0.$$

Ennek megoldása

$$\frac{y'}{y-20} = -k$$

$$\int \frac{1}{y-20}\,dy = \int -k\,dx$$

$$\ln(|y-20|) = -kx + c_1$$

$$|y-20| = c_2 \cdot e^{-kx}$$

$$y = c \cdot e^{-k \cdot x} + 20$$

Az $y(0) = 0$ feltétel miatt

$$0 = c \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{1} + 20 \iff c = -20$$

A feladat megoldása ekkor

$$y = 20\left(1 - e^{-k \cdot x}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy 1 perc elteltével 10 fokos lett a hőmérséklete, ezért $y(1) = 10$, vagyis

$$10 = 20\left(1 - e^{-k \cdot 1}\right)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-k}$$

$$e^{-k} = \frac{1}{2}$$

$$k = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2),$$

amiből

$$y = 20\left(1 - e^{-\ln(2)x}\right) = 20\left(1 - 2^{-x}\right).$$

Azt kapjuk, hogy a hőmérséklet 2 perc múlva

$$y(2) = 20 \cdot \left(1 - 2^{-2}\right) = 20\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 15,$$

vagyis 15 °C lesz.

9. A feladat szövege szerint az alábbi információink vannak.

$x' = k(m-x)$, $x(0)=0$ és $x(1)=0.2m$

Oldjuk meg az egyenletet.

$$\frac{x'}{k(m-x)} = 1$$

$$\int \frac{1}{k(m-x)}\,dx = \int 1\,dt$$

$$-\frac{1}{k}\ln(|m-x|) = t + c_1$$

$$\ln(|m-x|) = -k\cdot t \underbrace{-k c_1}_{c_2}$$

$$e^{\ln(|m-x|)} = \underbrace{e^{c_2}}_{c_3}\cdot e^{-kt}$$

$$|m-x| = c_3\cdot e^{-kt}$$

$$m-x = c_4\cdot e^{-kt}$$

$$x = m\underbrace{-c_4}_{c}\cdot e^{-kt}$$

$$x = m + c \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Az $x(0) = 0$ összefüggés miatt

$$0 = m + c \cdot e^{-k \cdot 0} \iff c = -m,$$

amiből $x = m\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$.

Az $x(1) = 0.2m$ összefüggés miatt

$$0.2m = m\left(1 - e^{-k}\right)$$

$$e^{-k} = 0.8 = \frac{4}{5},$$

innen pedig $e^{-kt} = \left(e^{-k}\right)^t = \left(\frac{4}{5}\right)^t$,

amiből $x = m \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right)$.

3 perc múlva $y(3) = m \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) =$

$= \frac{61}{125} m = 0.488m$. A anyag 48.8%-a oldódott fel 3 perc után.

10. Az 1-es feladatban felírt össze-függés

$$y'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} y(t) \quad \text{és} \quad y(0) = 0$$

Oldjuk meg az $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} y$ DE-t.

$$\frac{y'}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y} = 1$$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y} \, dy = \int 1 \, dt$$

$$-5 \ln\left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y\right|\right) = t + c_1$$

$$\ln\left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y\right|\right) = -\frac{t}{5} - \frac{c_1}{5}$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y\right| = e^{-\frac{1}{5}t} \cdot \underbrace{e^{-\frac{c_1}{5}}}_{c_2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} y = c_3 e^{\frac{1}{5}t}$$

$$y = \frac{5}{2} - \underbrace{5c_3}_{c} \cdot e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$y = \frac{5}{2} + c \cdot e^{-\frac{1}{5}t}.$$

Az $y(0)=0$ feltétel miatt.

$$0 = \frac{5}{2} + c \cdot e^{-0} \iff c = \frac{5}{2}.$$

A megoldás ekkor

$$y = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}t}\right).$$

10 perc elteltével a só mennyisége a tartályban

$$y(10) = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-2}\right) \approx 2.1617 \text{ kg}$$

Amennyiben sokáig magára hagyjuk a folyamatot

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}t}\right) = \frac{5}{2}(1-0) = \frac{5}{2},$$

vagyis a tartályban lévő só mennyisége beáll a konstans 2.5 kg-os szintre.

11.

a) $y' + xy - x = 0 \iff y' = -xy + x$

Oldjuk meg a homogén feladatot.

$$y' = -xy$$

$$\frac{y'}{y} = -x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx$$

$$\ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$y_h = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

A homogén általános megoldása.

Keressünk egy partikuláris megoldást $y_p = c(x)y_h = c(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$ alakban.

Mivel $y_p' = c'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} + c(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot(-x)$, ezért visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$y_p' + x\cdot y_p = x$$

$$c'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - c(x)\,x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x\cdot c(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$c'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$c'(x) = x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int c'(x)\,dx = \int x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$c(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} + c$$

Egy partikuláris megoldás innen

$$y_p = e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1$$

A megoldás innen

$$y = y_p + y_h = 1 + c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

b) $\cos(x) \cdot y' = -\sin(x) \cdot y + \cos^2(x)$

$y' = -\mathrm{tg}(x) y + \cos(x) \leftarrow$ inhomogén

A homogén megoldása

$$y = -\mathrm{tg}(x) y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\mathrm{tg}(x) \, dx$$

$$\ln(|y|) = \ln(|\cos(x)|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\ln(|\cos(x)|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot |\cos(x)|$$

$$y_h = c \cdot \cos(x)$$

Egy partikuláris megoldás $y_p = c(x) \cos(x)$ alakban.

$$y_p' = c'(x) \cdot \cos(x) - c(x) \cdot \sin(x)$$

$$c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) + c(x)\sin(x) = \cos(x)$$
$$c'(x) = 1$$
$$c(x) = x + c,$$
amiből egy partikuláris megoldás

$$y_p = x \cdot \cos(x)$$

A megoldás innen

$$y = x \cdot \cos(x) + c \cdot \cos(x)$$

c) $(x^2+4)y' - 2xy = (x^2+4)^2 \cos(x)$

$$y' = \frac{2x}{x^2+4} \cdot y + (x^2+4)^2 \cos(x)$$

A homogén megoldása

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2x}{x^2+4}\, dx$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x^2+4|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\ln(x^2+4)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2(x^2+4)$$

$$y_h = c\cdot(x^2+4)$$

Legyen $y_p = c(x)(x^2+4)$. Ekkor

$$y_p' = c'(x)(x^2+4) + c(x)\cdot 2x$$

$$c'(x)(x^2+4) + c(x)2x - c(x)2x = (x^2+4)\cos(x)$$

$$c'(x) = \cos(x)$$

$$c(x) = \sin(x) + c$$

Egy partikuláris megoldás

$$y_p = \sin(x)(x^2+4)$$

A megoldás

$$\boxed{y = \sin(x)(x^2+4) + c(x^2+4)}$$

d)

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x$$

$$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1$$

$$y' = \frac{1}{x(x+1)} y + 1$$

A homogén megoldása

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

Próbáljuk felbontani a jobboldali kifejezést az alábbi alakban

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A + x(A+B)}{x(x+1)},$$

mivel ez minden x esetén igaz, így

$A = 1$ és $A+B=0$, vagyis $A=1$, $B=-1$.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + c_1$$

$$\ln(|y|) = \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot \left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$y_h = \frac{c \cdot x}{x+1}$$

Innen $y_p = c(x) \cdot \dfrac{x}{x+1}$, amiből

$$y_p' = c'(x)\frac{x}{x+1} + c(x)\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$c'(x)\frac{x}{x+1} + c(x)\frac{1}{(x+1)^2} - c(x)\frac{1}{(x+1)^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c(x) = x + \ln(|x|) + c,$$

amiből $y_p = \dfrac{x^2 + x \cdot \ln(|x|)}{x+1}$.

A megoldás

$$\boxed{y = \frac{x^2 + x \cdot \ln(|x|) + c \cdot x}{x+1}}.$$

12.

a) $y' \cos(x) + \sin(x) y = 1$ és $y(0) = 1$

$$y' + \operatorname{tg}(x) y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

A homogén megoldása.

$$y' = -\operatorname{tg}(x) y$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int -\operatorname{tg}(x) \, dx$$

$$\ln(|y|) = \ln(|\cos(x)|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{\ln(|\cos(x)|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot |\cos(x)|$$

$$y_h = c \cdot \cos(x).$$

Keressünk megoldást $y_p = c(x)\cos(x)$ alakban.

$$y_p' = c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x)$$

Ekkor $y_p' + tg(x)y_p = \dfrac{1}{\cos(x)}$

$$c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) + c(x)\sin(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$c(x) = tg(x) + c$$

Egy partikuláris megoldás $y_p = tg(x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$, amiből az általános megoldása a feladatnak

$$y = y_p + y_h = \sin(x) + c \cdot \cos(x).$$

Használjuk az $y(0)=1$ feltételt. Ekkor

$$1 = \underbrace{\sin(0)}_{0} + c \cdot \underbrace{\cos(0)}_{1} \iff c = 1$$

A megoldás innen

$$\boxed{y = \sin(x) + \cos(x)}.$$

b) $xy' - 2y = x^3 e^x$ és $y(1) = 2$

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^x$$

A homogén megoldása

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln(|y|) = 2\ln(|x|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{2\ln(|x|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot x^2$$

$$y_h = c \cdot x^2$$

Keressünk megoldást $y_p = c(x)\,x^2$ alak-ban.

$$y_p' = c'(x)\,x^2 + c(x)\,2x.$$

Ekkor $y_p' - \frac{2}{x}y_p = x^2e^x$ esetén

$$c'(x)\,x^2 + c(x)\cdot 2x - 2x\,c(x) = x^2e^x$$

$$c'(x) = e^x$$

$$c(x) = e^x + c,$$

amiből egy partikuláris megoldás

$$y_p = e^x \cdot x^2,$$

illetve egy általános megoldás

$$y = y_p + y_h = e^x \cdot x^2 + c \cdot x^2,$$

továbbá, az $y(1)=2$ feltétel miatt

$$2 = e^1 \cdot 1^2 + c \cdot 1^2 \iff c = 2-e,$$

amiből a megoldás

$$\boxed{y = e^x \cdot x^2 + (2-e)x^2}.$$

(c) $xy' + 2y = x^4$ és $y(1) = -2$

$$y' + \frac{2}{x} y = x^3$$

A homogén megoldása

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{2}{x}\, dx$$

$$\ln(|y|) = -2\ln(|x|) + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{-2\ln(|x|)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot x^{-2}$$

$$y = c \cdot x^{-2}$$

Keressük partikuláris megoldást $y_p = c(x)x^{-2}$ alakban.

$$y_p' = c'(x) \cdot x^{-2} - c(x)2x^{-3}$$

$$c'(x)x^{-2} - c(x)2x^{-3} + c(x)2x^{-3} = x^3$$

$$c'(x) = x^5$$

$$c(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$$

Egy partikuláris megoldás $\frac{1}{6}x^4$, amiből egy általános megoldás

$$y = \frac{1}{6}x^4 + c \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Az $y(1) = -2$ feltétel miatt

$$-2 = \frac{1}{6} \cdot 1^4 + c \cdot 1^{-2} \Leftrightarrow c = -\frac{13}{6}.$$

A megoldás innen

$$\boxed{y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{6x^2}}$$

d) $y' + x^2 y = x^2$ és $y(2) = 1$

A homogén megoldása

$$y' + x^2 y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -x^2\,dx$$

$$\ln(|y|) = -\frac{1}{3}x^3 + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{-\frac{1}{3}x^3} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

$$y_h = c \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

Keressünk megoldást $y_p = c(x)\,e^{-\frac{1}{3}x^3}$ alakban.

$$y_p' = c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} - c(x)\,x^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} - c(x)\,x^2 e^{-\frac{1}{3}x^3} + x^2 c(x)\,e^{-\frac{1}{3}x^2} = x^2$$

$$c'(x) = x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$c(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} + c$$

Egy partikuláris megoldás $y_p = e^{-\frac{1}{3}x^3} \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} = 1$, amiből egy általános megoldás

$$y = 1 + c \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Az $y(2) = 1$ feltétel miatt

$$1 = 1 + c \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot 8} \iff c = 0.$$

A megoldás akkor

$$\boxed{y = 1}.$$

(13.) $y' - 2y = 3e^t$

(1) Oldjuk meg a homogén egyenletet

$$y' - 2y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = 2$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2\,dt$$

$$\ln(|y|) = 2t + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{2t} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{2t}$$

$$y_h = c \cdot e^{2t}.$$

(2) Keressünk partikuláris megoldást $y_p = c(t)e^{2t}$ alakban. Ekkor
$$y_p' = c'(t)e^{2t} + c(t)2e^{2t}.$$

Ekkor amennyiben

$$y_p' - 2y_p = 3e^{t}$$

$$c'(t)e^{2t} + 2c(t)e^{2t} - 2c(t)e^{2t} = 3e^{t}$$

$$c'(t)e^{2t} = 3e^{t}$$

$$c'(t) = 3e^{-t}$$

$$c(t) = -3e^{-t} + c,$$

amiből egy jó megoldás

$$y_p = -3e^{-t}.$$

Az általános megoldás innen

$$y = y_p + y_h = -3e^{-t} + c \cdot e^{2t}$$