

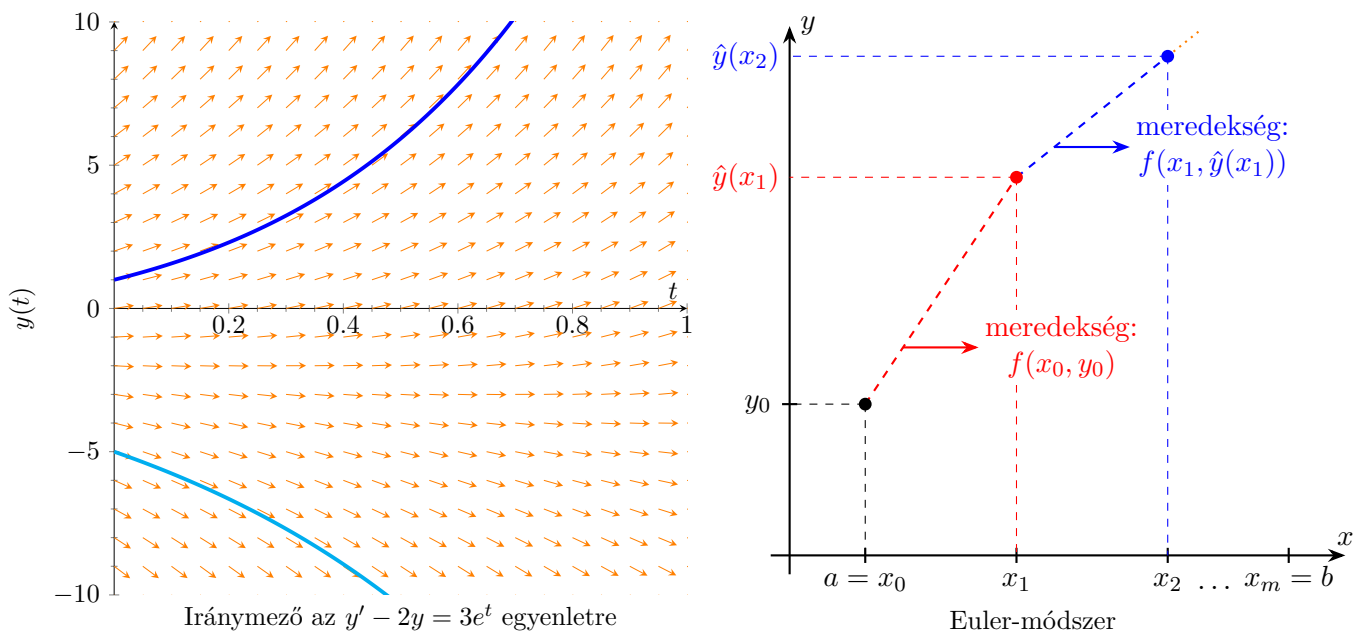
3. feladatsor

Elsőrendű differenciálegyenletek II

1. Elméleti összefoglaló

Íránymező

Az $y' = f(x, y)$ vagy kirészletezve az $y'(x) = f(x, y(x))$ alakú explicit differenciálegyenlet esetén grafikusan arról van szó, hogy az xy sík minden pontjában az $f(x, y)$ függvény egy meredekséget ír elő. Ezt lehet úgy vizualizálni, hogy a sík (x, y) pontjába egy rövid $f(x, y)$ meredekségű vonalat rajzolunk. Ezt a szemléltetést nevezzük iránymezőnek. A következő példában a változót az időre utalva (tempus) x helyett t jelöli.



Az általános megoldás keresése azt jelenti, hogy felírjuk az összes olyan $y(x)$ függvényt amely kompatibilis a kis vonalakkal vagyis amelyekre igaz, hogy minden pontban a derivált vagyis az érintő meredeksége megegyezik az előírttal vagyis a kis vonal meredekségével.

Euler-módszer

Az Euler-módszer egy egyszerű és nagyon szemléletes módszer az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti probléma $a = x_0$ és b közti közelítő megoldásának meghatározására. Először is kis részintervallumokra bontjuk az $[a, b]$ intervallumot az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ osztópontokkal. Ezután az osztópontokban meghatározzuk a közelítő értéket majd ezeket egyenesekkel összekötjük. Az osztópontokban a közelítő értékeket egy iteratív eljárással határozzuk meg. Először felvesszük az (x_0, y_0) ponton átmenő előírt vagyis $f(x_0, y_0)$ meredekségű egyenest, majd ezt kiértékeljük az x_1 pontban. Így adódik az $\hat{y}(x_1)$ -el jelölt x_1 -beli közelítő érték. Ezt követően felvesszük az $(x_1, \hat{y}(x_1))$ ponton átmenő előírt vagyis $f(x_1, \hat{y}(x_1))$ meredekségű egyenest és kiértékeljük az x_2 -ben. Így adódik $\hat{y}(x_2)$ vagyis az x_2 -beli közelítés. Ezt iteratívan folytatjuk addig amíg megkapjuk az $x_m = b$ -beli közelítést is.

Euler-módszer a matematika nyelvén:

Az első lépésben

$$\hat{y}(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0).$$

Amennyiben már meghatároztuk $\hat{y}(x_k)$ -t, akkor

$$\hat{y}(x_{k+1}) = \hat{y}(x_k) + f(x_k, \hat{y}(x_k)) \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

2. Feladatok

1. Vázold az $y' = y + 1$ differenciálegyenlet iránymezőjét!
2. Vázold az $y' = x + y$ differenciálegyenlet iránymezőjét!
3. Vázold az $y' = (y + 2)(y - 2)$ differenciálegyenlet iránymezőjét!
4. Közelítsd az $y' = x - y$, $y(0) = 1$ Cauchy probléma megoldását a $[0, 1]$ intervallumon a 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 osztópontokat használva!
5. Használd az Euler-módszert $y(1)$ becslésére 0.2-es részintervallum hosszal, ha $y' = y$, $y(0) = 1$! Mi $y(1)$ pontos értéke?
6. Használd az Euler-módszert $y(2)$ becslésére 0.2-es részintervallum hosszal, ha $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$! Mi $y(2)$ pontos értéke?
7. Használd az Euler-módszert $y(2)$ becslésére $\frac{1}{3}$ részintervallum hosszal, ha $y' = y - e^{2x}$, $y(0) = 1$! Mi $y(2)$ pontos értéke?
8. Egy 98 Celsius fokos kemény tojást egy nagy tál 18 fokos vízbe tesszük. Ha a tojás hőmérséklete 5 perc alatt 38 Celsius fokra csökken, mennyi időt kell még várunk, hogy a tojás 20°C-os legyen?
9. A kísérletek tanúsága szerint a radioaktív elemek bomlásának üteme (az idő- egységenként megváltozó atomok száma) a mintában meglévő atomok számával arányos. A radioaktív bomlást tehát a $dy/dt = -ky$, ($k > 0$) egyenlet írja le. A radioaktivitás segítségével a Föld régmúltja eseményeinek idejét is meghatározhatjuk. Az élő szervezetekben a 14-es tömegszámú radioaktív szénizotóp és a közönséges (12-es tömegszámú) szénizotóp aránya a szervezet életideje alatt közel állandó (és körülbelül megegyezik a környezet hasonló mutatójával), a szervezet elpusztulása után azonban a 14-es izotópok nem pótlódnak, arányuk ennek megfelelően folyamatosan csökken. A 14-es karbonizotóp felezési ideje 5700 év. Milyen régi az a lelet, amelyben az eredeti szintnél 10% -kal kevesebb 14-es izotóp van?
10. Az óceán felszíne alatt x méter mélységben az $L(x)$ fényerősség kielégíti a

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

differenciálegyenletet. Tapasztalt bűvárként tudjuk, hogy a Karib-tengeren 5.5 m mélységben a fényerősség éppen feleakkora, mint a felszínen. Mesterséges világításra van szükségünk akkor, ha a fényerősség a felszíni érték egytizedére csökken. Milyen mélyre merülhetünk búvárlámpa nélkül?

11. Egy alumíniumrudat a hideg udvarról beviszünk a 18 Celsius fokos raktárba; 10 perc elteltével a rúd hőmérséklete 2 Celsius fokosra, további 10 perc múltán pedig 10 fokosra növekszik. Newton törvénye alapján becsüljük meg, hány fokos volt eredetileg a rúd?
12. Egy széndarabban, amely egy, az oregoni Crater-tavat létrehozó vulkánkitörés során elpusztult fából származik, a 14-es szénizotóp mennyisége az élő anyagban lévő mennyiség 44.5%-a. Mikor keletkezett a tó?
13. Egy Vermeernek (1632-1675) tulajdonított festményben az eredeti C14-tartalomnak legfőljebb 96.2%-a lehet jelen, ehelyett azonban 99.5%-ot állapítunk meg. Hány éves lehet körülbelül a hamisítvány?
14. * Hallgasd meg figyelmesen a függőhidak láncainak alakjáról szóló oktatói előadást ([ide kattintva eléred a kötődő wikipedia oldalt](#))!