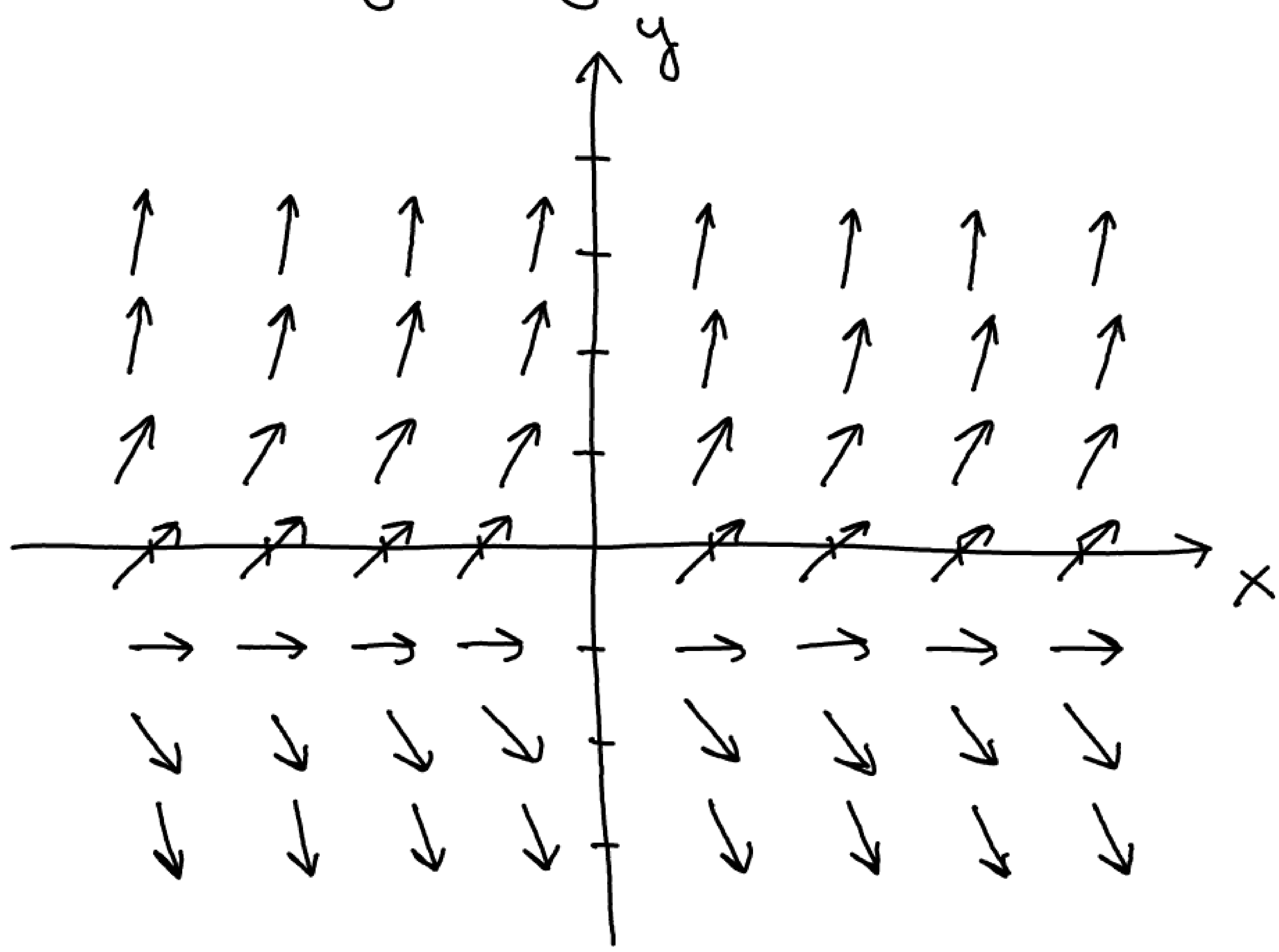
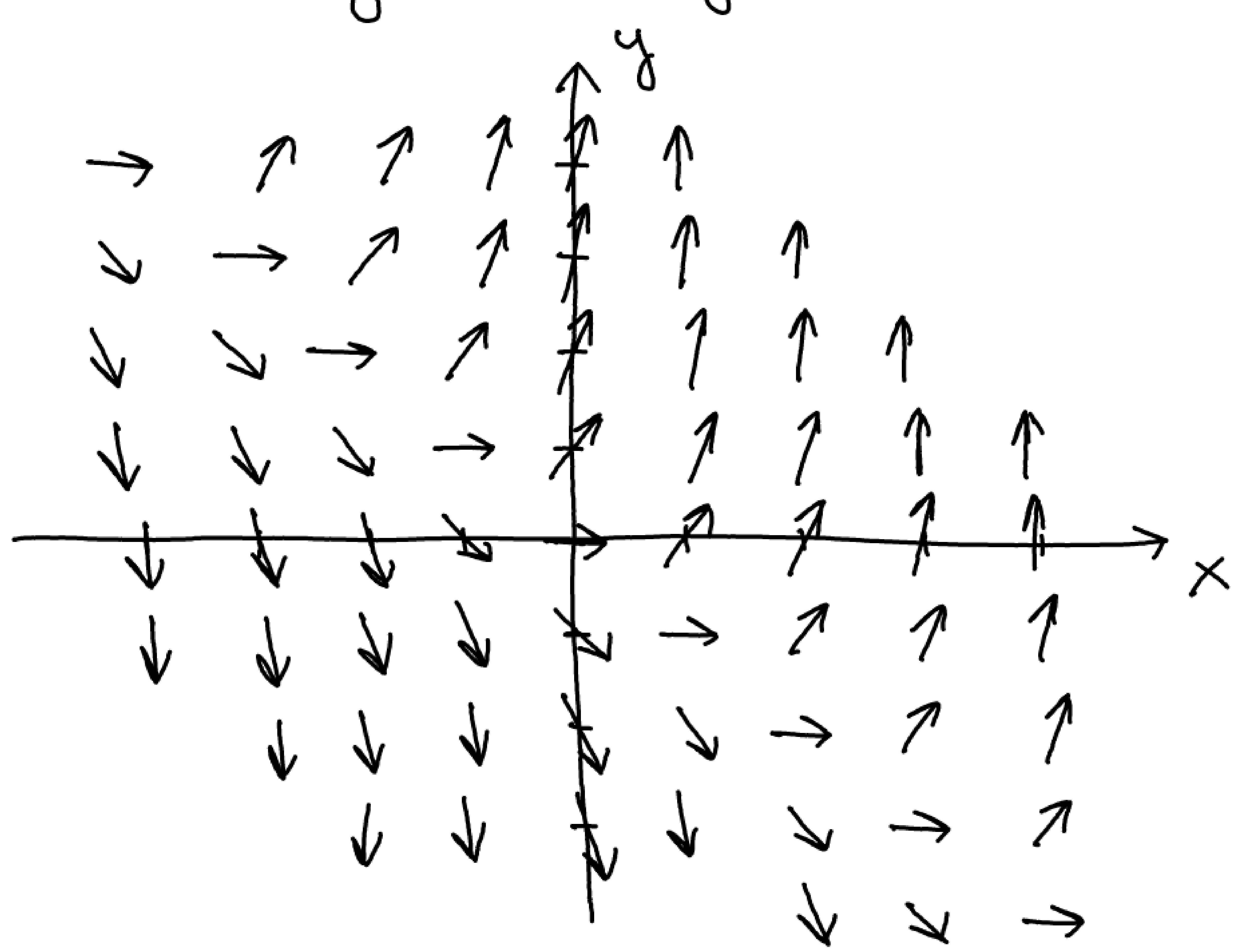
1.

$$y' = y + 1$$

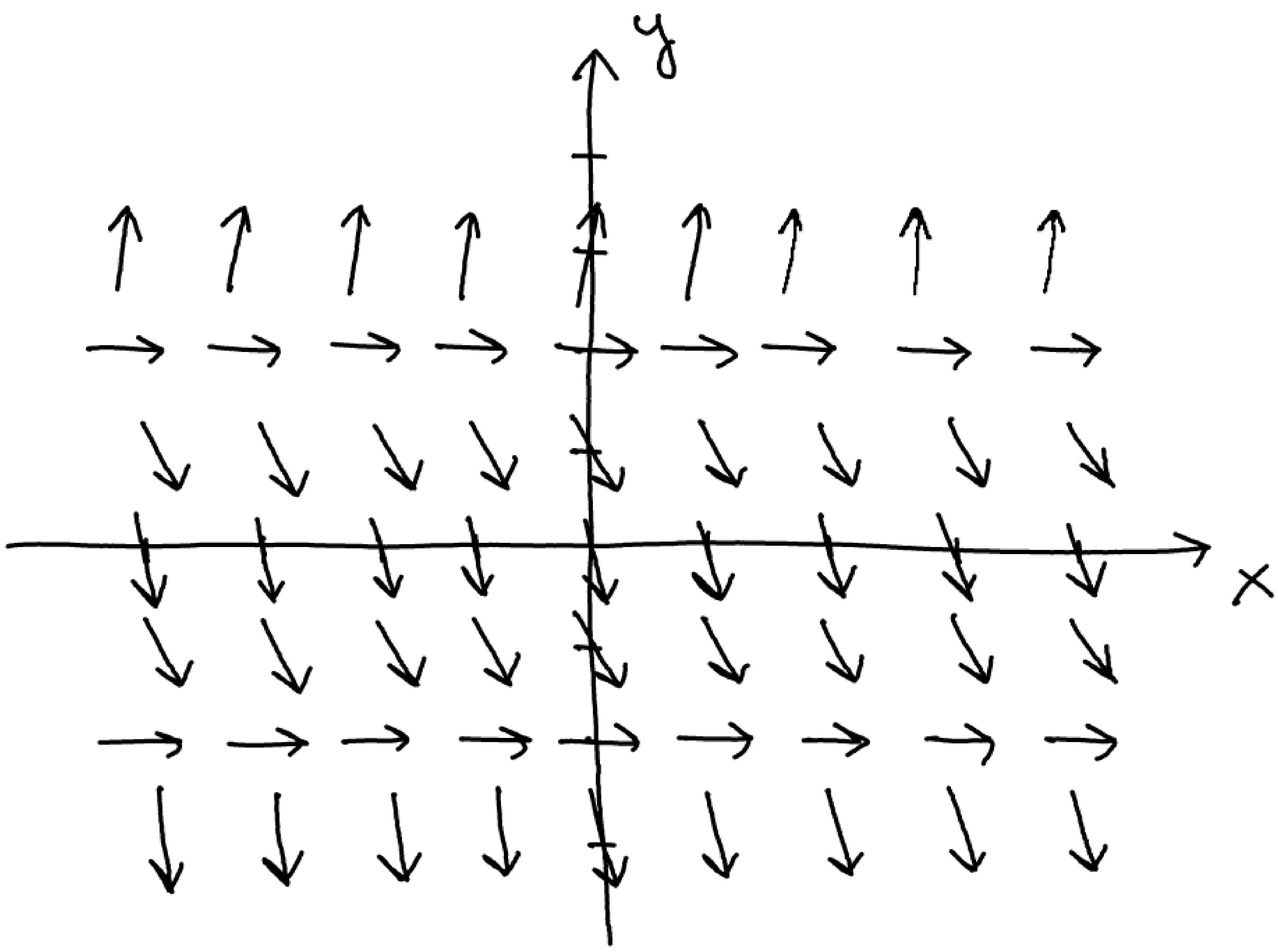


2.

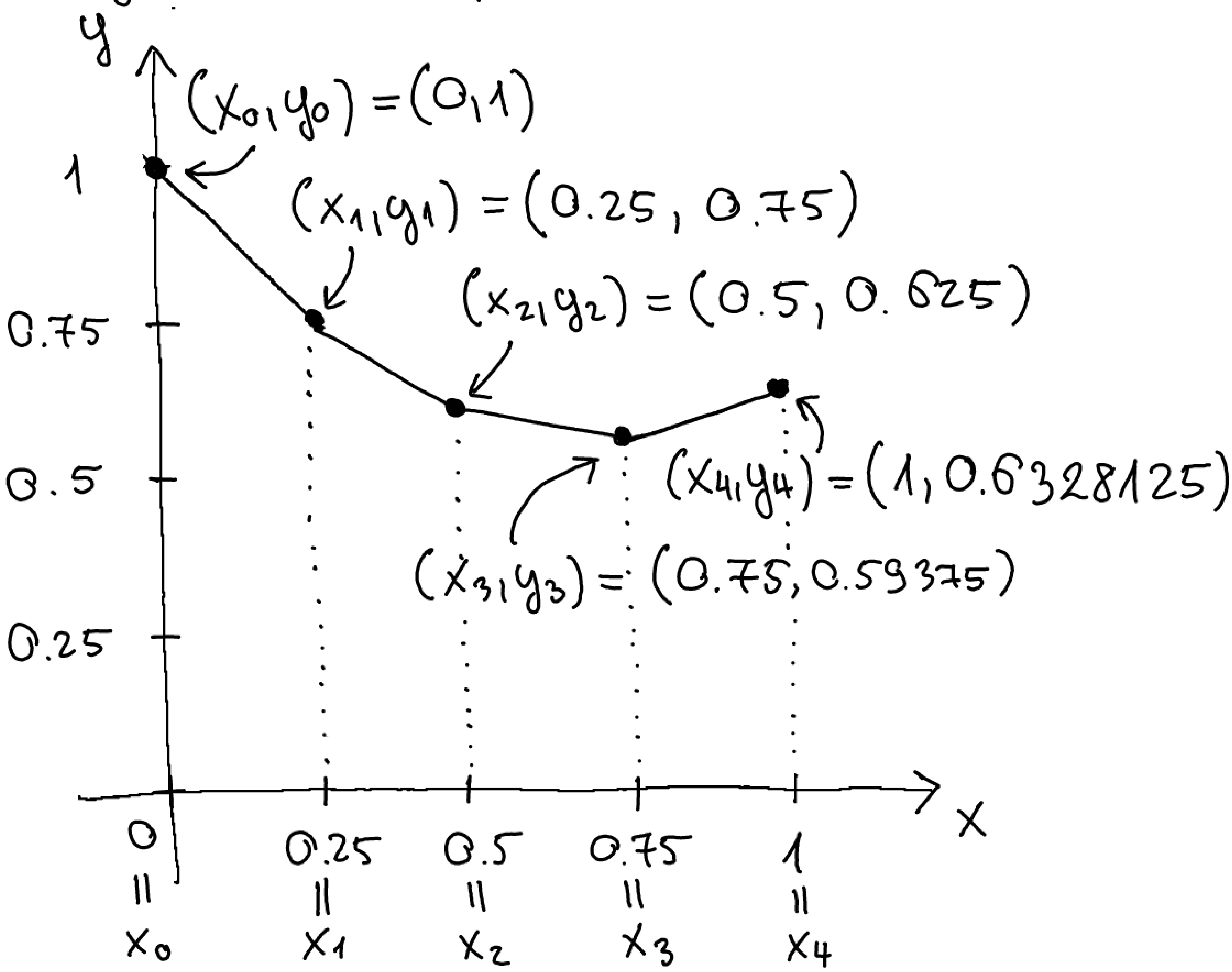
$$y' = x + y$$



3. $y' = (y+2)(y-2)$



4. $y' = x - y = f(x,y)$ és $y(0) = 1$



$$y_1 = y_0 + y'(x_1 - x_0) = 1 + (0-1)\cdot(0.25-0) = 0.75$$

$$y_2 = y_1 + y'(x_2 - x_1) = 0.75 - 0.5 \cdot 0.25 = 0.625$$

$$y_3 = y_2 + y'(x_3 - x_2) = 0.625 - 0.125 \cdot 0.25 = 0.59375$$

$$y_4 = y_3 + y'(x_4 - x_3) = 0.59375 + 0.1565 \cdot 0.25 = $$
$$= 0.6328125$$

5. $y' = y = f(x,y)$ és $y(0) = 1$

Mivel az intervallumhossz 0.2 mindig, ezért $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$ és $x_5 = 1$.

$$y_1 = y_0 + y_0(x_1 - x_0) = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + y_1(x_2 - x_1) = 1.2 + 1.2 \cdot 0.2 = 1.44$$

$$y_3 = y_2 + y_2(x_3 - x_2) = 1.44 + 1.44 \cdot 0.2 = 1.728$$

$$y_4 = y_3 + y_3(x_4 - x_3) = \ldots = 2.0736$$

$$y_5 = y_4 + y_4(x_5 - x_4) = \ldots = 2.48832$$

A becslés tehát $y(1) \approx 2.4882$

A diffegyenlet megoldása $y(x) = e^x$, amiből a pontos érték

$$y(1) \approx 2.7183$$

6. $y' = \frac{1}{x} \cdot y = f(x,y)$ és $y(1) = 2$

Az osztópontok közötti távolság mindig 0.2, így $x_0 = 1$, $x_1 = 1.2$, ..., $x_5 = 2$.

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{x_0} \cdot y_0 (x_1 - x_0) = 2 + \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 0.2 = 2.4$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{x_1} \cdot y_0 (x_2 - x_1) = 2.4 + \frac{1}{1.2} \cdot 2.4 \cdot 0.2 = 2.8$$

$$y_3 = 2.8 + \frac{1}{1.4} \cdot 2.8 \cdot 0.2 = 3.2$$

$$y_4 = 3.2 + \frac{1}{1.6} \cdot 3.2 \cdot 0.2 = 3.6$$

$$y_5 = 3.6 + \frac{1}{1.8} \cdot 3.6 \cdot 0.2 = 4$$

A becslés tehát $y(2) \approx 4$.

A megoldása a feladatnak $y(x) = 2x$, amiből a pontos érték

$$y(2) = 4.$$

Most a közelítés pontos volt, ami nem meglepő, hiszen a megoldás lineáris függvény.

7. $y' = y - e^{2x} = f(x,y)$ és $y(0) = 1$.

Az osztópontok: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, ..., $x_6 = 2$.

$$y_1 = 1 + (1 - e^{2\cdot 0}) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$y_2 = 1 + (1 - e^{2\cdot\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} \approx 0.6841$$

$$y_3 = 0.6841 + (0.6841 - e^{2\cdot\frac{2}{3}}) \cdot \frac{1}{3} \approx -0.3524$$

$$y_4 \approx -2.9329$$

$$y_5 \approx -8.7079$$

$$y_6 \approx -20.9544$$

A becslés $y(2) \approx -20.9544$

A feladat megoldása $y(x) = 2e^x - e^{2x}$, amiből a pontos értéke

$$y(2) = 2e^2 - e^4 \approx -39.82$$

8.) Az 2-es feladatsor 8-as feladata alapján a megoldandó egyenlet

$$y' = -k(y-18) \text{ és } y(0) = 98$$

A feladatot teljesen analóg módon megoldva azt kapjuk, hogy

$$y = 18 + 80 \cdot e^{-k \cdot x}.$$

Mivel 5 perc alatt 38°C-ra csökkent a tojás hőmérséklete, ezért

$$35 = y(5) = 18 + 80 \cdot e^{-5k}$$

$$e^{-5k} = \frac{17}{80}$$

$$k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{80}{17}\right).$$

A t időpont, amikor 20°C lesz a tojás $20 = y(t) = 18 + 80 \cdot e^{-kt}$

$$t = \frac{\ln(40) \cdot 5}{\ln\left(\frac{80}{17}\right)} \approx 11.9.$$

Kb. 12 perc múlva lesz 20°C-os a tojás.

9. A feladat szövege szerinti DE

$$y' = -ky$$

$$\frac{y'}{y} = -k$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -k\,dt$$

$$\ln(|y|) = -kt + c_1$$

$$e^{\ln(|y|)} = e^{-kt} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|y| = c_2 \cdot e^{-kt}$$

$$y = c \cdot e^{-kt}$$

Mivel a felezési idő 5700 év, ezért

$$y(5700) = \frac{1}{2} \cdot y(0)$$

$$c \cdot e^{-k \cdot 5700} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{1}$$

Feltehető, hogy $c > 0$, ekkor

$$e^{-k \cdot 5700} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{5700}$$

Milyen t esetén lesz a szénizotóp 0.1 része az eredeti szintnek?

$$y(t) = \frac{1}{10} y(0)$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{10}$$

$$t = \frac{5700 \cdot \ln(10)}{\ln(2)}$$

$$t \approx 18934.99$$

A lelet tehát nagyjából 18 935 éves.

10. A szöveg alapján felírt DE:

$$y'(x) = -k \cdot y(x) \text{ és } y(5.5) = \frac{1}{2} y(0)$$

Oldjuk meg: $y' = -ky$

$$\frac{y'}{y} = -k$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -k\, dx$$

$$y = c \cdot e^{-kx}$$

Tudjuk, hogy

$$c \cdot e^{-k \cdot 5.5} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{1}$$

Innen adódik, hogy

$$-\frac{11}{2} \cdot k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k = \frac{2}{11} \cdot \ln(2) > 0$$

Keressük azt az x-et, amire

$$c \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5.5}x} \geq \frac{1}{10} \cdot c \cdot \underbrace{e^{-\frac{\ln(2)}{5.5} \cdot 0}}_{1}$$

$$e^{-\frac{\ln(2)}{5.5}x} \geq \frac{1}{10}$$

$$-\frac{2}{11}\ln(2) \cdot x \geq \ln(0.1)$$

$$x \overset{*}{\leq} -\frac{11}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \ln(0.1) \approx 18.27$$

Legfeljebb 18.27 méter mélységbe merülhetünk búvárlámpa nélkül.

* Az egyenlőtlenség megfordul, mert

$$-\frac{2}{11}\ln(2) < 0.$$

11. Az előző feladatsor 8-as feladata alapján amennyiben y_0 a rúd eredeti hőmérséklete az egyenlet

$$y' = -k(y-18) \quad \text{és} \quad y(0) = y_0$$

Az egyenletet megoldva

$$y = 18 + c \cdot e^{-k \cdot t},$$

amiből az $y(0) = y_0$ feltétel miatt

$$y_0 = 18 + c \iff c = y_0 - 18,$$

vagyis

$$y = 18 + (y_0 - 18) \cdot e^{-k \cdot t}.$$

A feladat szerinti további két feltétel az alábbi

$$2 = y(10) \quad \text{és} \quad 10 = y(20)$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 18 + (y_0 - 18) e^{-10k} \\ 10 &= 18 + (y_0 - 18) e^{-20k} \end{aligned}\right\}$$

Rendezve a két oldalt.

$$\left.\begin{aligned} -16 &= (y_0-18)e^{-10k} \\ -8 &= (y_0-18)e^{-20k} \end{aligned}\right\}$$

Feltehető, hogy $y_0 \neq 18$, így a két oldalt elosztva egymással.

$$2 = e^{10k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{10},$$

amit az első egyenletbe vissza-helyettesítve

$$-16 = (y_0-18)e^{-10\cdot\frac{\ln(2)}{10}}$$

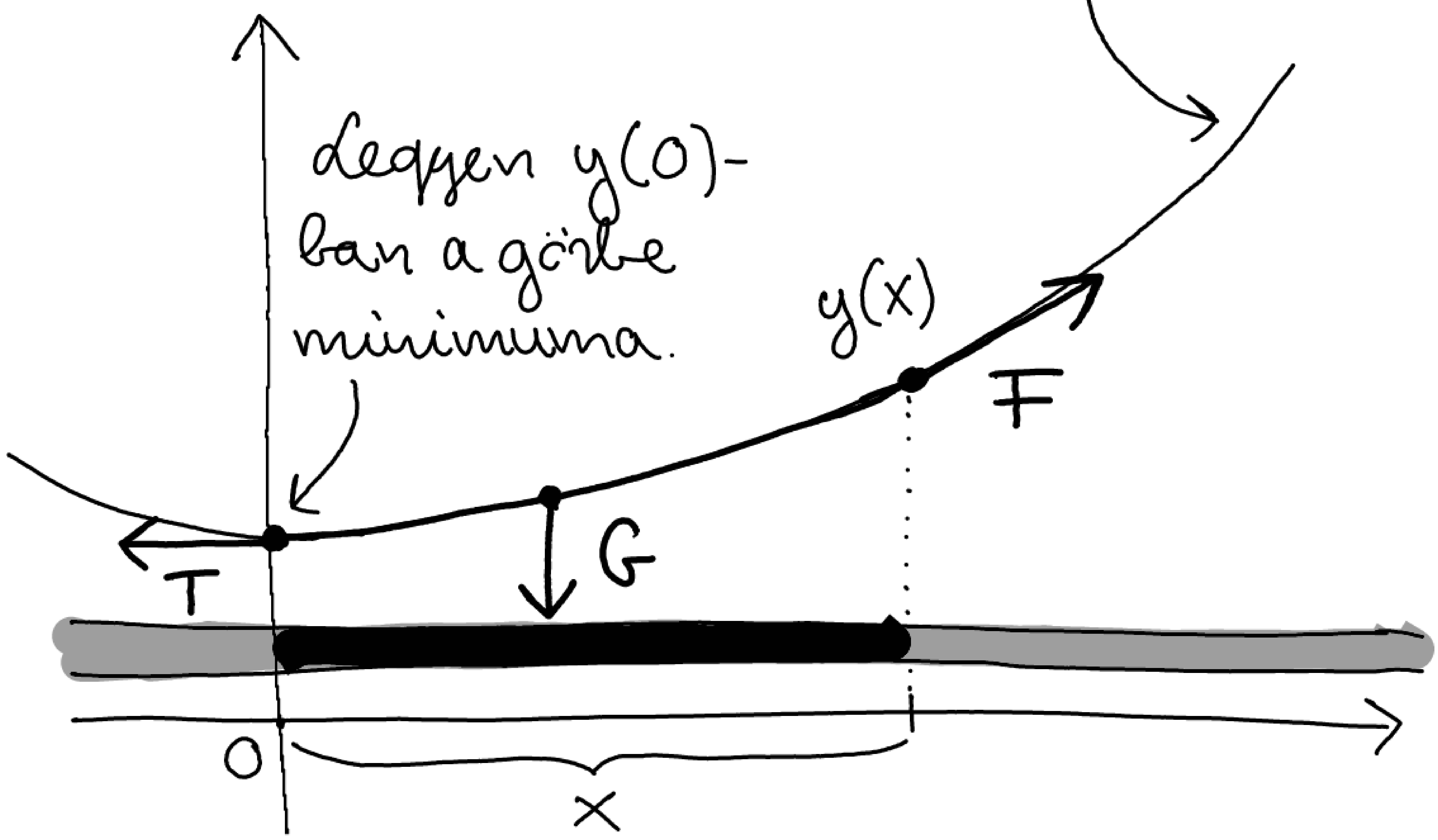
$$-16 = (y_0-18)\cdot\frac{1}{2}$$

$$-36 = y_0-18$$

$$y_0 = -18$$

Az alumíniumrúd eredeti hőmérséklete tehát $-18\,^\circ C$ volt.

14. <u>1. Eset</u>: A súly elhanyagolható.

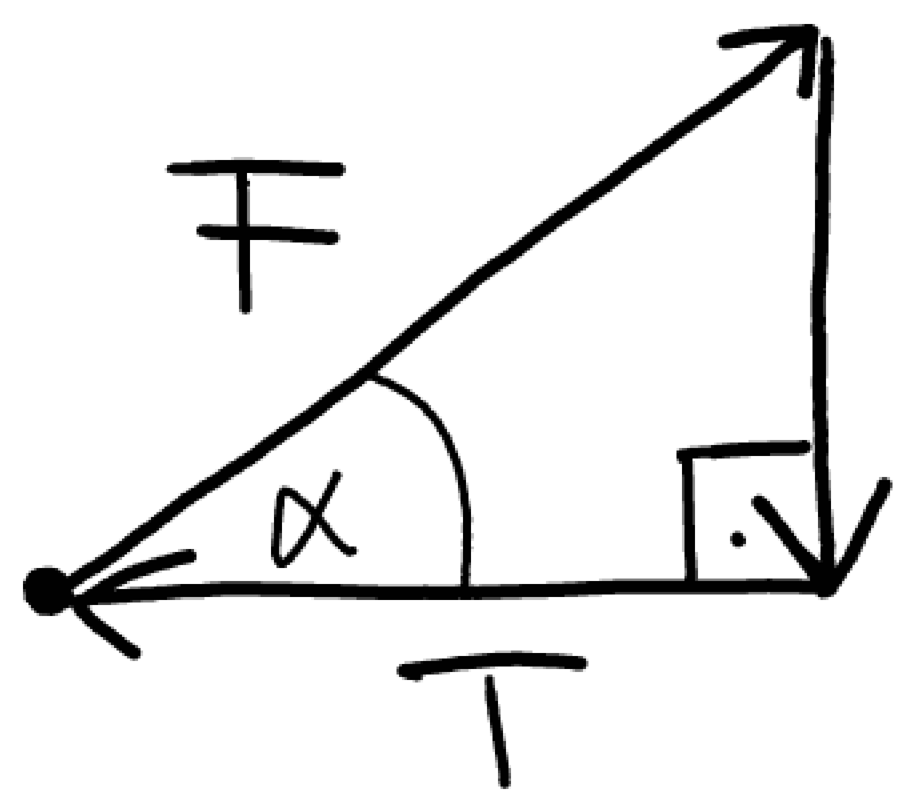


T: A feszültségből származó erő a nulla helyen. Ez konstans és vízszintes irányú

F: A feszültségből származó erő az x helyen. Ez érintőirányú az y(x) pontban.

G: A gravitációs erő. Függőleges irányú és arányos az alatta lévő tömeggel, aminek ha a sűrűsége ρ, akkor $G = \underbrace{x \cdot \rho}_{m} \cdot g$.

Mivel a híd nyugalomban van, ezért



,

ahol $tg(\alpha)$ a függvény érintőjének a meredeksége az x helyen, vagyis

$$y'(x) = tg(\alpha) = \frac{G}{T} = x \cdot \underbrace{\frac{\rho \cdot g}{T}}_{\mu} = x \cdot \mu$$

A görbe egyenlete akkor kielégíti az

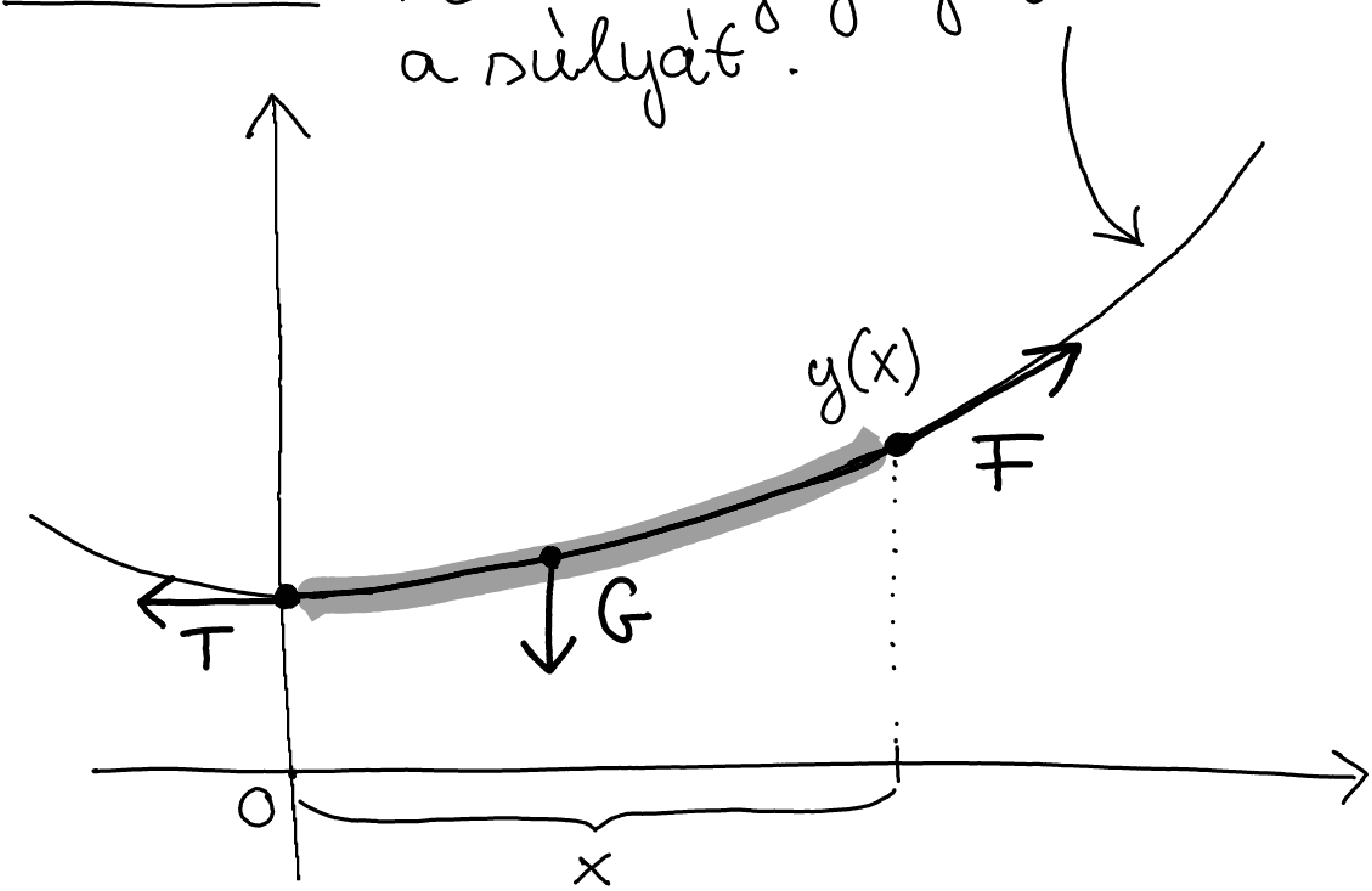
$$y' = x \cdot \mu$$

differenciálegyenletet. A megoldás

$$y = \int x \cdot \mu \, dx = \frac{1}{2} \mu x^2 + c,$$

vagyis a görbe egy parabola lesz.

2. Eset: Nem hanyagoljuk el a súlyát.



T és F ugyanazok mint az előző esetben.

G: A gravitációs erő, amit most úgy kapunk, hogy az adott szakaszon a görbe hosszát szorozzuk a sűrűségével majd ezt g-vel, vagyis

$$G = g \cdot \rho \cdot \underbrace{\int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt}_{\text{Az } y \text{ hossza } 0 \text{ és } x \text{ között}}$$

Az összefüggések ugyanazok, csak G változott meg:

$$y'(x) = \frac{G}{T} = \underbrace{\frac{\rho \cdot g}{T}}_{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

Deriváljunk x szerint

$$y''(x) = \alpha \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Az alábbi differenciálegyenlethez jutunk.

$$y'' = \alpha \sqrt{1 + y'^2}$$

Legyenek $u = y'$ és $u' = y''$. Ekkor

$$u' = \alpha \sqrt{1 + u^2}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = \alpha$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du = \int \alpha\, dx$$

$$\operatorname{arsh}(u) = \alpha \cdot x + c_1$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(u)) = \operatorname{sh}(\alpha \cdot x + c_1)$$

$$u = \operatorname{sh}(\alpha \cdot x + c_1)$$

$$y' = \operatorname{sh}(\alpha \cdot x + c_1)$$

$$y = \frac{1}{\alpha} \operatorname{ch}(\alpha \cdot x + c_1) + c_2 ,$$

ami a láncgörbe.