

4. feladatsor

Másodrendű differenciálegyenletek

1. Elméleti összefoglaló

Állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletek

Az állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$py'' + qy' + ry = f(x),$$

ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$. Amennyiben a fenti egyenletben $f(x) \equiv 0$, akkor homogén állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletünk van.

A megoldás menete: Az egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük a homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése próbafüggvény módszerrel. Azaz

$$y_{\text{IH},\text{Á}} = y_{\text{H},\text{Á}} + y_{\text{IH},\text{P}}$$

Homogén állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenlet megoldása

A homogén egyenlet megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Ha elvégezzük ezt a behelyettesítést, akkor felírhatjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét, ami a következő:

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0.$$

Ennek megoldásai a D diszkrimináns függvényében a következők lehetnek:

1. $D > 0$, azaz az egyenletnek két különböző valós gyöke van λ_1 és λ_2 . Ekkor

$$y_{\text{H},\text{Á}} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Megjegyzés: Két negatív gyök esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás exponenciálisan gyorsan tart 0-hoz. Míg ha valamelyik gyök pozitív, akkor a megoldás exponenciálisan távolodik a 0-tól.

2. $D = 0$, azaz az egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke van λ . Ekkor

$$y_{\text{H},\text{Á}} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Megjegyzés: Negatív gyök esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás exponenciálisan gyorsan tart 0-hoz. Míg ha a gyök pozitív, akkor a megoldás exponenciálisan távolodik a 0-tól.

3. $D < 0$, azaz az egyenletnek nem valós, hanem két komplex gyöke van $u + iv$ és $u - iv$ (látható, hogy a gyökök egymás konjugáltjai). Ekkor

$$y_{\text{H},\text{Á}} = c_1 e^{ux} \cos(vx) + c_2 e^{ux} \sin(vx)$$

Megjegyzés: Negatív u esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás ugyan rezegve, de még mindig exponenciálisan gyorsan tart 0-hoz. Míg ha u pozitív, akkor exponenciálisan növekvő hullámok keverékei a megoldások. Ha pedig $u = 0$, akkor konstans amplitúdójú hullámok keverékei a megoldások.

Inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése speciális jobboldal esetén

Tegyük fel, hogy a jobboldal

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \text{vagy} \quad f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

alakú, ahol $P_n(x)$ n -edfokú polinom, továbbá α és β valós számok (lehetnek 0-k is!). A megoldás első lépése ezen mennyiségek meghatározása. Annak megfelelően, hogy $\alpha \pm \beta i$ gyöke-e a karakterisztikus egyenletnek, három esetet különböztetünk meg.

1. $\alpha \pm \beta i$ nem gyökei a karakterisztikus egyenletnek. Ekkor van egy partikuláris megoldás

$$y_{\text{IH,P}} = Q_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + R_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n -edfokú polinomok, amelyek együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

2. Egyszeres valós gyök, komplex gyökök, azaz az egyszeres rezonancia esete. Ekkor valójában két eset van.

(a) $\beta = 0$ és a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van λ_1 és λ_2 , α pedig ezen gyökök közül az egyik.

(b) $\beta \neq 0$ és a karakterisztikus egyenlet komplex gyökei $\alpha \pm \beta i$.

Ekkor mindkét esetben van egy partikuláris megoldás

$$y_{\text{IH,P}} = xQ_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + xR_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n -edfokú polinomok, amelyek együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

3. Kétszeres valós gyök, azaz a kétszeres rezonancia esete. Tegyük fel, hogy $\beta = 0$ és a karakterisztikus egyenletnek egy darab valós kétszeres gyöke van λ , amire $\lambda = \alpha$ (azaz a gyök megegyezik α -val). Ekkor van egy partikuláris megoldás

$$y_{\text{IH,P}} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

alakban, ahol $Q_n(x)$ n -edfokú polinom, amelynek együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

2. Feladatok

1. Határozd meg a következő homogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

(c) $y'' + 4y' = 0$

(d) $y'' - 4y = 0$

(e) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(f) $y'' - 8y' + 16y = 0$

(g) $y'' - 8y' = 0$

(h) $y'' + 9y = 0$

2. Határozd meg a következő Cauchy feladatok megoldását (homogén másodrendű egyenletek)!

(a) $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

(b) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

(d) $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

3. Határozd meg a következő inhomogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' - 6y' + 13y = (8x + 4)e^{3x}$

(b) $y'' - 4y' = 2021$

(c) $y'' - 2y' - 3y = 2 \cos(3x)$

(d) $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$

(e) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

(f) $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$

(g) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 2)$

(h) $y'' + y + \sin(2x) = 0$

(i) $y'' - 2y' + y = e^x$

(j) $y'' - 6y' + 5y = e^x \sin(x)$

(k) $*y'' - y = (2x + 3)e^x + xe^{2x}$

(l) $*y'' - 5y' + 6y = \text{sh}(3x)$

(m) $*y'' - 8y' + 25y = \text{ch}(4x)$

(n) $*y'' + 4y = 4 \cos(2x) + 3 \sin(4x)$

4. Határozd meg a következő Cauchy feladatok megoldását (másodrendű inhomogén egyenletek)!

(a) $y'' + 4y = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

(b) $y'' - 2y' + y = -1, \quad y(2) = -1, \quad y'(2) = e^2$