1.

a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 1$$

$$\lambda - 3 = \pm 1$$

A gyökök $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$.

Az egyenlet megoldása

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{4x}.$$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = -4$$
$$\lambda - 1 = \sqrt{-4}$$
$$\lambda - 1 = \pm 2i$$
$$\lambda = 1 \pm 2i$$

A gyökök $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$

A megoldás:

$$y = c_1 \cdot e^x \cos(2x) + c_2 \cdot e^x \sin(2x)$$

c) $y'' + 4y' = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda + 4) = 0$$

A gyökök $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$.

A megoldás:

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{-4x}$$

d

$$y'' - 4y' = 0$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

A gyökök $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$.

A megoldás:

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{4x}$$

e

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = -9$$

$$\lambda - 1 = \sqrt{-9}$$

$$\lambda - 1 = \pm 3i$$

$$\lambda = 1 \pm 3i$$

A gyökök $\lambda_1 = 1 + 3i$, $\lambda_2 = 1 - 3i$

A megoldás:

$$y = c_1 \cdot e^x \cos(3x) + c_2 \cdot e^x \sin(3x)$$

(f) $y'' - 8y' + 16y = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\lambda - 4 = 0$$

A gyökök $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$

A megoldás:

$$y = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x}$$

(g) $y'' + 8y' = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 8) = 0$$

A gyökök $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -8$.

A megoldás:

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{-8x}$$

(h) $y'' + 9y = 0$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

$$\lambda = \pm 3i$$

A gyökök $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$

A megoldás:

$$y = c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)$$

2.

a) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

A gyökök $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Az általános megoldás

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x}.$$

Az $y(0) = 2$ miatt $2 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = c_1 + c_2$

Az $y'(0) = 3$ miatt, mivel

$$y' = -2c_1 e^{2x} - 3c_1 e^{3x},$$

ezért $3 = -2c_1 \cdot e^0 - 3c_2 \cdot e^0 = -2c_1 - 3c_2$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = 9,\ c_2 = -7$$

A megoldás

$$y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$$

(b) $y'' + y' - 2y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\lambda + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$$

A gyökök $\lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 1$.

Az általános megoldás

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^x.$$

Az $y(0) = 1$ miatt $1 = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = c_1 + c_2$

Az $y'(0) = 3$ miatt, mivel

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + c_1 e^x,$$

ezért $1 = -2c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 = -2c_1 + c_2$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ -2c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} c_1 = 0, \; c_2 = 1$$

A megoldás

$$y = e^x.$$

ⓒ $y'' - 2y' + 5y = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
$$(\lambda-1)^2 + 4 = 0$$
$$(\lambda-1)^2 = -4$$
$$\lambda - 1 = \sqrt{-4}$$
$$\lambda - 1 = \pm 2i$$

A gyökök: $\lambda_1 = 1 + 2i$ és $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Az általános megoldás

$$y = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 \cdot e^x \sin(2x)$$

Az $y(\pi/2) = 0$ feltételből

$$0 = c_1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi) + c_2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi) = -c_1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}},$$

amiből $c_1 = 0$ adódik.

Az $y'(\pi/2) = 2$ feltétel miatt, mivel

$$y' = c_2 \cdot e^x \sin(2x) + 2c_2 e^x \cos(2x),$$

ezért

$$2 = c_2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi) + 2c_2 e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi) = -2c_2 e^{\frac{\pi}{2}},$$

amiből $c_2 = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

A megoldás ekkor

$$y = -e^{x-\frac{\pi}{2}} \cdot \sin(2x)$$

d) $9y''-12y'+4y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-1$

A karakterisztikus egyenlet ekkor

$$9\lambda^2+12\lambda+4=0$$
$$(3\lambda-2)^2=0$$
$$3\lambda-2=0$$

A gyökök $\lambda_1=\lambda_2=\frac{2}{3}$.

Az általános megoldás

$$y=c_1\cdot e^{\frac{2}{3}x}+c_2\cdot x\cdot e^{\frac{2}{3}x}$$

Az $y(0)=2$ feltétel miatt

$$2=c_1\cdot e^0+c_2\cdot 0\cdot e^0=c_1$$

Az $y'(0)=-1$ feltétel miatt, mivel

$$y'=\frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}x}+\frac{2}{3}c_2\cdot x e^{\frac{2}{3}x}+c_2 e^{\frac{2}{3}x},$$

ezért

$$-1=\frac{4}{3}e^0+\frac{2}{3}c_2\cdot 0\cdot e^0+c_2\cdot e^0=\frac{4}{3}+c_2 \Leftrightarrow c_2=-\frac{7}{3}$$

A megoldás innen

$$y=2e^{\frac{2}{3}x}-\frac{7}{3}xe^{\frac{2}{3}x}$$

3. A megfelelő homogén egyenletek megoldását nem vezetem le részletesen a feladatokban.

a) $y'' - 6y' + 13x = (8x+4)e^{3x}$

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = 3+2i \text{ és } \lambda_2 = 3-2i$$

A homogén általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x}\cos(2x) + c_2 \cdot e^{3x}\sin(2x)$$

A jobboldal:

$$P_n(x)\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) = (8x+4)e^{3x}\cos(0x),$$

vagyis

$$\alpha = 3,\ \beta = 0 \text{ és } P_1(x) = (8x+4)$$

Mivel $\alpha \pm \beta i = 3$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, ezért

$$y_p = Q_1(x)\, e^{3x}\cos(0 \cdot x) + R_1(x)\, e^{3x}\sin(0 \cdot x) =$$

$$= Q_1(x)e^{3x} = (q_1 x + q_0)\, e^{3x}$$

alakban keressünk egy megoldást

A deriváltak ekkor

$$y_p = (q_1x+q_0)e^{3x}$$

$$y_p' = q_1e^{3x} + 3(q_1x+q_0)e^{3x}$$

$$y_p'' = 3q_1e^{3x}+3q_1e^{3x}+9(q_1x+q_0)e^{3x} = 6q_1e^{3x}+9(q_1x+q_0)e^{3x}$$

Azt akarjuk, hogy $y_p'' - 6y_p' + 13y_p = (8x+4)e^{3x}$ teljesüljön vagyis

$$\underbrace{6q_1e^{3x}+9(q_1x+q_0)e^{3x}}_{y_p''}\ \underbrace{-6q_1e^{3x}-18(q_1x+4)e^{3x}}_{-6y_p'}$$

$$\underbrace{+\,13(q_1x+q_0)e^{3x}}_{13y_p} = (8x+4)e^{3x}$$

A tagokat összevonva $4(q_1x+q_0)e^{3x}=(8x+4)e^{3x}$, ami egyszerűsítés után

$$q_1x+q_0=2x+1$$

Ekkor $q_1=2$ és $q_0=1$ jó választás lesz.

Egy konkrét megoldás ekkor

$$y_p=(2x+1)e^{3x}$$

Az általános megoldás pedig

$$y = y_p + y_h,$$

vagyis

$$y = (2x+1)e^{3x} + C_1 e^{3x}\cos(2x) + C_2 e^{3x}\sin(2x).$$

b) $y'' - 4y' = 2021$

A karakterisztikus egyenlet gyökei
$\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 4$
A homogén általános megoldása
$y_h = C_1 + C_2 \cdot e^{4x}$

Az inhomogén egyenlet jobboldala

$$2021 = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x),$$

ahol
$P_0(x) = 2021$, $\alpha = 0$ és $\beta = 0$.
Mivel $\alpha \pm \beta i = 0$ megoldása a karakterisztikus egyenletnek, ezért keressünk egy megoldást az alábbi alakban

$$y_p = Q_0(x) \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x) + R_0(x) \cdot x \cdot e^{0x} \sin(0 \cdot x)$$

$$y_p = q_0 \cdot x$$

Ekkor a deriváltak
$y_p = q_0 x$, $y_p' = q_0$ és $y_p'' = 0$.

Ezeket visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$y_p'' - 4y_p' = 2021$$

$$0 - 4q_0 = 2021$$

$$q_0 = -\frac{2021}{4}$$

jó választás lesz, amiből egy megoldás

$$y_p = -\frac{2021}{4}x$$

Az általános megoldás ekkor
$$y = y_p + y_h$$

$$y = -\frac{2021}{4}x + c_1 + c_2 e^{4x}$$

(c) $y'' - 2y' - 3y = 2\cos(3x)$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}.$$

Az egyenlet jobboldala ekkor

$$2\cos(3x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

amiből

$P_0(x) = 2$, $\alpha = 0$ és $\beta = 3$

Mivel $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, így keressünk egy megoldást a következő alakban

$$y_p = Q_0(x) e^{0 \cdot x} \cos(3x) + R_0(x) e^{0 \cdot x} \sin(3x)$$

$$y_p = q_0 \cdot \cos(3x) + r_0 \sin(3x)$$

$$y_p' = -3q_0 \sin(3x) + 3r_0 \cos(3x)$$

$$y_p'' = -9q_0 \cos(3x) - 9r_0 \sin(3x)$$

Visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-9q_0\cos(3x) - 9r_0\sin(3x)$$

$$+ 6q_0\sin(3x) - 6r_0\cos(3x)$$

$$- 3q_0\cos(3x) - 3r_0\sin(3x) =$$

$$= (-12q_0 - 6r_0)\cos(3x) + (6q_0 - 12r_0)\sin(3x)$$

$$\|$$

$$2\cos(3x),$$

Vagyis

$$\left.\begin{aligned} -12q_0 - 6r_0 &= 2 \\ 6q_0 - 12r_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

választás esetén jó megoldást kapunk.
Az egyenletrendszert megoldva

$$q_0 = -\frac{2}{15} \qquad r_0 = -\frac{1}{15}$$

Egy jó megoldás ekkor

$$y_p = -\frac{2}{15}\cos(3x) - \frac{1}{15}\sin(3x)$$

Az általános megoldás

$$y = -\frac{2}{15}\cos(3x) - \frac{1}{15}\sin(3x) + c_1 \cdot e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

(d) $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$

A karakterisztikus egyenlet gyökei
$\lambda_1 = -3 + 5i$ és $\lambda_2 = -3 - 5i$
A homogén általános megoldása
$y_h = c_1 e^{-3x} \cos(5x) + c_2 e^{-3x} \sin(5x)$.

Az egyenlet jobboldala

$$17x^2 - 62x + 23 = P_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

ahol
$P_2(x) = 17x^2 - 62x + 23$, $\alpha = 0$ és $\beta = 0$.
Mivel $\alpha \pm \beta i = 0$ nem megoldása a karakterisztikus egyenletnek, ezért keressünk egy megoldást az alábbi alakban

$$y_p = Q_2(x) e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x) + R_2(x) e^{0x} \sin(0 \cdot x)$$

$$y_p = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

$$y_p' = 2q_2 x + q_1$$

$$y_p'' = 2q_2$$

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$y_p'' + 6y_p' + 34y_p = 17x^2 - 62x + 23$$

$$2q_2 + 12q_2x + 6q_1 + 34q_2x^2 + 34q_1x + 34q_0 =$$

$$= 34q_2x^2 + (12q_2 + 34q_1)x + (2q_2 + 6q_1 + 34q_0)$$

$$\parallel$$

$$17x^2 - 62x + 23,$$

aminek a megoldása lesz y_p az

$$\left.\begin{aligned} 34q_2 &= 17 \\ 12q_2 + 34q_1 &= -62 \\ 2q_2 + 6q_1 + 34q_0 &= 23 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer fennállása esetén.

$$q_2 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow q_1 = -2 \rightsquigarrow q_0 = 1$$

Egy jó megoldás

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

Az általános megoldás

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 + c_1e^{-3x}\cos(5x) + c_2e^{-3x}\sin(5x)$$

(e) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$
Az általános megoldás

$$y = -\frac{x}{5}e^{-x} + c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

(f) $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$
Az általános megoldás

$$y = 2e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

(g) $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 2)$
Az általános megoldás

$$y = -e^{x}(x^2 + x + 4) + c_1 + c_2 e^{2x}$$

(h) $y'' + y + \sin(2x) = 0$
Az általános megoldás

$$y = \frac{1}{3}\sin(2x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

(i) $y'' - 2y' + y = e^x$

Az általános megoldás

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$$

(j) $y'' - 6y' + 5y = e^x \sin(x)$

Az általános megoldás

$$y = \frac{4}{17} e^x \cos(x) - \frac{1}{17} e^x \sin(x) + c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

4.

(a) $y'' + 4y = x^2 + 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

A megoldás

$$y = \frac{5}{8}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

(b) $y'' - 2y' + y = -1$, $y(2) = -1$, $y'(2) = e^2$

A megoldás

$$y = xe^x - 2e^x - 1$$