

5. feladatsor

Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás

1. Elméleti összefoglaló

Sajátérték, sajátvektor definíciója általában komplex elemű mátrixokra

Legyen $A = [a_{ij}]$ egy komplex elemű n -edrendű (négyzetes) mátrix. A komplex λ számot az A mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül. Az $A\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának hívjuk.

Az $A = [a_{ij}]$ komplex elemű n -edrendű mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

A definícióból is látható, hogy a négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai "párban" léteznek. A definícióban lévő egyenletet átrendezve kapjuk, hogy a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezért a lineárisan független sajátvektorokat kell megkeresnünk. Más szóhasználattal a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát keressük.

Megjegyzés: A $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom n -edfokú, így az algebra alaptétele miatt (multiplicitással számolva) n sajátértékünk van. A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak. Ugyanakkor ha például λ egy 2-szeres sajátérték, akkor hozzá tartozhat 2 lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.

Valós elemű mátrixok

A Matematika EP1 tárgyban szerepelt, hogy az n -edrendű, valós elemű A mátrix az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, mely az $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tárgyvektorhoz az $\underline{y} = A\underline{v}$ képvektort rendeli. A gyakorlatban érdekesek azok a vektorok, melyek iránya az adott lineáris transzformáció során nem változik, azaz érdekesek a sajátérték-sajátvektor párok.

Fontosak a következő állítások:

- Ha A valós mátrixnak minden sajátértéke valós, akkor a sajátaltér bázisai felvehetők úgy, hogy minden koordináta valós legyen. Így elég csak a valós sajátvektorokkal foglalkozni.
- Ha A valós szimmetrikus mátrix ($A = A^T$), akkor minden sajátértéke valós. (Ezzel az esettel foglalkozunk a legtöbbet.)
- Ha A egy n -edrendű valós szimmetrikus mátrix, akkor A -nak van n számú, páronként ortogonális, lineárisan független sajátvektora. (Megjegyzés: Ez alapján 3-adrendű mátrixok esetében, ha ismerünk két sajátvektort, akkor a harmadikat már megkaphatjuk ezek vektoriális szorzataként is.)

Diagonalizálás és hatványozás

A valós elemű n -edrendű A mátrixot ortogonálisnak (ortonormálnak) nevezzük, ha $A \cdot A^T = I_n$, ahol I_n az n -edrendű egységmátrix (vagyis az inverzük egyszerűen a transzponáltjuk). Könnyen látszik, hogy A akkor és csak akkor ortonormált ha oszlopvektorai egységnyi hosszúak és páronként ortogonálisok (természetesen ugyanez igaz a sorvektorokra is).

Diagonalizálás: Egy n -edrendű A mátrix diagonalizálható, ha létezik egy olyan n -edrendű invertálható C mátrix, hogy a $C^{-1}AC$ szorzatmátrix diagonális legyen. Egy n -edrendű A mátrix akkor és csak akkor

diagonalizálható, ha van n lineárisan független $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sajátvektora. Ekkor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ oszlopvektorokkal rendelkező C mátrixra, valamint a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékekre igaz a következő egyenlőség:

$$C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Megjegyzés: A valós elemű n -edrendű szimmetrikus A mátrix esetében létezik olyan diagonalizáló C mátrix, amely ortonormált. Azaz ekkor az az egyenlőség áll fenn, hogy $C^T AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Hatványozás: A diagonalizálható A mátrixra fennálló fenti egyenlőséget $A = C \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot C^{-1}$ formában is felírhatjuk. Indukcióval látható, hogy $(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$, azaz diagonális mátrix hatványozásánál csak a főátlóban szereplő értékeket kell a megfelelő hatványra emelnünk. Ez lényegesen megkönnyíti egy tetszőleges mátrix hatványozását, hiszen ekkor:

$$A^k = C \cdot \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot C^{-1}$$

2. Feladatok

1. Számítsd ki a következő 2×2 -es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írd fel a következő lineáris transzformációk mátrixát, majd határozza meg a sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) origó körüli $+90^\circ$ -os forgatás;

(b) $x = y$ egyenesre való vetítés;

(c) x tengelyre való vetítés.

3. Számítsd ki a következő 3×3 -as szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Számítsd ki a következő 3×3 -as NEM szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a fenti feladatokban? Határozd meg azt a C mátrixot (ha lehet, akkor ortonormált C -t adjon meg), ami diagonalizálja őket, illetve határozd meg az A^{10} mátrixhatványokat is!