

5. feladatsor

Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás

1. Számítsd ki a következő 2×2 -es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás

(a) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -3 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - (-3) \cdot 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 10\lambda + 24 &= 0 \\ (\lambda - 5)^2 - 1 &= 0 \\ (\lambda - 5)^2 &= 1 \\ \lambda - 5 &= \pm 1 \\ \lambda &= 5 \pm 1. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 6.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 7 - 4 & -3 \\ 1 & 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 7 - 6 & -3 \\ 1 & 3 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 - 36 = \lambda^2 - 13\lambda.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 13\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 13) &= 0. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 13.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 9 - 0 & 6 \\ 6 & 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}S_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 2S_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 13$

$$\begin{bmatrix} 9-13 & 6 \\ 6 & 4-13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-3S_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (7-\lambda) - 0 \cdot 5 = \lambda^2 - 10\lambda + 21.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 10\lambda + 21 &= 0 \\ (\lambda - 5)^2 - 4 &= 0 \\ (\lambda - 5)^2 &= 4 \\ \lambda - 5 &= \pm 2 \\ \lambda &= 5 \pm 2. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 7.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 5 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 7$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 0 \\ 5 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-5S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 25 = 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 10\lambda.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 10\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 10) &= 0. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 10.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 5-0 & 5 \\ 5 & 5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-5S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 10$

$$\begin{bmatrix} 5-10 & 5 \\ 5 & 5-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-5S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \cdot (6-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = \lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 15\lambda + 50 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} + 50 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{15}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\ \lambda - \frac{15}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\ \lambda &= \frac{15 \pm 5}{2}.\end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 10.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 9-5 & -2 \\ -2 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+S_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 10$

$$\begin{bmatrix} 9-10 & -2 \\ -2 & 6-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(f) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 5\lambda - 14 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 14 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{81}{4} \\ \lambda - \frac{5}{2} &= \pm \frac{9}{2} \\ \lambda &= \frac{5 \pm 9}{2}.\end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei tehát

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 7.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = -2$

$$\begin{bmatrix} 3-(-2) & 5 \\ 4 & 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-4S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 7$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 5 \\ 4 & 2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+S_1} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(g) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 0 \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértéke tehát (kétszeres multiplicitással)

$$\lambda_{1,2} = 1.$$

Keressük meg a sajátértékhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(h) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 0 \cdot 0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértéke tehát (kétszeres multiplicitással)

$$\lambda_{1,2} = 1.$$

Keressük meg a sajátértékhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) A mátrix karakterisztikus polinoma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 0 \cdot 0 = \lambda^2.$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 0 \\ \lambda &= 0. \end{aligned}$$

A mátrix sajátértéke tehát (kétszeres multiplicitással)

$$\lambda_{1,2} = 0.$$

Keressük meg a sajátértékhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 0-0 & 0 \\ 0 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írd fel a következő lineáris transzformációk mátrixát, majd határozza meg a sajátértékeit és sajátvektorait!

- (a) origó körüli $+90^\circ$ -os forgatás;
- (b) $x = y$ egyenesre való vetítés;
- (c) x tengelyre való vetítés.

Megoldás

(a) A standard bázis elemeinek a képei:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A standard bázis elemeinek a képei:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c) A standard bázis elemeinek a képei:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Számítsd ki a következő 3×3 -as szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} & \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} & \text{(e)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(f)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(g)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} & \text{(h)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} & \text{(i)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(j)} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Megoldás

(a) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes a második sor szerint kifejteni)[cite: 10].

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 6 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot ((8 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) - 6 \cdot 6)$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 11\lambda - 12)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek[cite: 10].

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - 11\lambda - 12) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 1$ biztosan sajátérték[cite: 10].

Amennyiben $\lambda \neq 1$, akkor osszunk le a megfelelő taggal[cite: 10]. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 11\lambda - 12 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{11}{2}\right)^2 &= \frac{169}{4} \\ \lambda - \frac{11}{2} &= \pm \frac{13}{2} \\ \lambda &= \frac{11 \pm 13}{2}\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 12$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat[cite: 10].

(1) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 8+1 & 0 & 6 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 6 & 0 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}S_1 \text{ \& } \frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 6S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 8-1 & 0 & 6 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 6 & 0 & 3-1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 6S_1} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{22}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{22}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 - \frac{6}{7}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(3) $\lambda_3 = 12$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 8-12 & 0 & 6 \\ 0 & 1-12 & 0 \\ 6 & 0 & 3-12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & -11 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_1 \text{ \& } -\frac{1}{11}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{S_3 - 6S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(b) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdekes a második sor szerint kifejtteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot ((7-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 6 \cdot 6)$$

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda - 22)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda - 22) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = -1$ biztosan sajátérték.

Amennyiben $\lambda \neq -1$, akkor osszunk le a megfelelő taggal. Ekkor:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 9\lambda - 22 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - \frac{88}{4} &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{169}{4} \\ \lambda - \frac{9}{2} &= \pm \frac{13}{2} \\ \lambda &= \frac{9 \pm 13}{2}\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 11.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = -2$

$$\begin{bmatrix} 7+2 & 0 & 6 \\ 0 & -1+2 & 0 \\ 6 & 0 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-6S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 7+1 & 0 & 6 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 6 & 0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-6S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-\frac{3}{4}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_3 = 11$

$$\begin{bmatrix} 7-11 & 0 & 6 \\ 0 & -1-11 & 0 \\ 6 & 0 & 2-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_1 \ \& \ -\frac{1}{12}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-6S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes a második sor szerint kifejteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \cdot ((2-\lambda) \cdot (5-\lambda) - 4)$$

$$p(\lambda) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(6-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 6$ biztosan sajátérték.

Amennyiben $\lambda \neq 6$, akkor osszunk le a megfelelő taggal. Ekkor:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{24}{4} &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\ \lambda - \frac{7}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\ \lambda &= \frac{7 \pm 5}{2}\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 6.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 2 \\ 0 & 6-1 & 0 \\ 2 & 0 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_{2,3} = 6$

$$\begin{bmatrix} 2-6 & 0 & 2 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 2 & 0 & 5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{S_3-2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) A mátrix karakterisztikus polinoma:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(3-\lambda) - (-2)(-2)) + 2 \cdot (0 - 2(2-\lambda))$$

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 4(2-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$-\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

$$-\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 6.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{S_3+2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(e) A mátrix karakterisztikus polinoma:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda)$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$-(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = 0$$

$$-(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = -1 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 2.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_{1,2} = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1, S_3 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 + 2S_1, S_3 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}S_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3 - 3S_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(f) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes a harmadik sor szerint kifejtetni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot ((3 - \lambda)^2 - 4)$$

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 2$ biztosan sajátérték. Amennyiben $\lambda \neq 2$, akkor:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 4$$

$$\lambda - 3 = \pm 2$$

$$\lambda = 3 \pm 2$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 5.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 - 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_3 = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}S_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(g) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdekes az első sor szerint kifejtteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 5 \\ 0 & 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \cdot ((4 - \lambda)^2 - 25)$$

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 4$ biztosan sajátérték. Amennyiben $\lambda \neq 4$, akkor:

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 - 16 - 9 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 25$$

$$\lambda - 4 = \pm 5$$

$$\lambda = 4 \pm 5$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 9.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_1 \& \frac{1}{5}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 5S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_1 \& \frac{1}{5}S_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_3 = 9$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}S_1 \& -\frac{1}{5}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 5S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(h) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes a harmadik sor szerint kifejtetni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 & 0 \\ 5 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (8 - \lambda) \cdot ((3 - \lambda)^2 - 25)$$

$$p(\lambda) = (8 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 16)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(8 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 16) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 8$ biztosan sajátérték. Amennyiben $\lambda \neq 8$, akkor:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda - 16 &= 0 \\ (\lambda - 3)^2 - 9 - 16 &= 0 \\ (\lambda - 3)^2 &= 25 \\ \lambda - 3 &= \pm 5 \\ \lambda &= 3 \pm 5 \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 8.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = -2$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 5S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}S_3, S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_{2,3} = 8$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 5S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes a második sor szerint kifejtetni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \cdot ((-\lambda)^2 - 9)$$

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 9)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 9) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 3$ biztosan sajátérték. Amennyiben $\lambda \neq 3$, akkor:

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 = 9$$

$$\lambda = \pm 3$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 3.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-3S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_{2,3} = 3$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-3S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(j) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdekes a harmadik sor szerint kifejteti):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot \left(\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$p(\lambda) = (2 - \lambda) \left(\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Adódik, hogy a $\lambda = 2$ biztosan sajátérték. Amennyiben $\lambda \neq 2$, akkor:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 2.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 + \frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_{2,3} = 2$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 + \frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Számítsd ki a következő 3×3 -as NEM szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

Megoldás

(a) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdemes az első oszlop szerint kifejteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) - 0 + (-1) \cdot (2 - 2(2-\lambda))$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) - (2\lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2(1-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 3.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_1, S_3 - S_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_1, \frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1 + 2S_2, S_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 + 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-S_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 + S_2, S_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdekes a harmadik oszlop szerint kifejtteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot ((3-\lambda)(-1-\lambda) - (-4))$$

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda - 1)^2$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$(2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+4S_1, S_3-4S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2, S_3+12S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda_{2,3} = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+2S_1, S_3-2S_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}S_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1-S_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(c) A mátrix karakterisztikus polinoma (érdekes az első sor szerint kifejtteni):

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-\lambda(3-\lambda) - (-3)) - 1 \cdot (0(3-\lambda) - 1)$$

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei lesznek.

$$-(\lambda - 1)^3 = 0$$

Azt kaptuk tehát, hogy a sajátérték (háromszoros multiplicitással):

$$\lambda_{1,2,3} = 1.$$

Keressük meg a sajátértékhez tartozó független sajátvektorokat.

(1) $\lambda_{1,2,3} = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+S_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1+3S_2, S_3+2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a fenti feladatokban? Határozd meg azt a C mátrixot (ha lehet, akkor ortonormált C -t adjon meg), ami diagonalizálja őket, illetve határozd meg az A^{10} mátrixhatványokat is!

Megoldás Pontosan azok az $n \times n$ -es mátrixok diagonalizálhatóak, amikhez tartozik n darab független sajátvektor.

1. Mindegyik mátrix a h) feladatbeli kivételével diagonalizálható. Néhány példa:

(a) A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 4; \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 6.$$

Ekkor a C és D mátrixoknak egy jó választás

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$C^{-1}AC = D \quad \text{vagy másképpen} \quad A = CDC^{-1}.$$

A C mátrix inverze

$$C^{-1} = \frac{1}{1-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az A mátrix tizedik hatványa ekkor

$$A^{10} = CD^{10}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & 6^{10} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^{10} - 3 \cdot 6^{10} & 3 \cdot 6^{10} - 3 \cdot 4^{10} \\ 4^{10} - 6^{10} & 6^{10} - 3 \cdot 4^{10} \end{bmatrix}.$$

(b) A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

A sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0; \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 13.$$

Vegyük észre, hogy $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ merőlegesek. Normáljuk le mindkét vektort, hogy egység hosszúak legyenek. Ekkor ezek is sajátvektorok lesznek és továbbra is merőlegesek.

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0; \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 13.$$

Ekkor a C és D mátrixoknak egy jó választás

$$C = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$C^{-1}AC = D \quad \text{vagy másképpen} \quad A = CDC^{-1}.$$

A C mátrix inverze könnyen kiszámolható, mive az oszlopoi merőlegesek és egység hosszúak

$$C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix tizedik hatványa ekkor

$$A^{10} = CD^{10}C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^{10} & 0 \\ 0 & 13^{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 13^9 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Mindegyik mátrix diagonalizálható lesz.
4. Az a) feladatbeli diagonalizálható, de a b) és c) feladatbeliek nem.