

6. feladatsor

Kétváltozós függvények deriválása

1. Elméleti összefoglaló

Kétváltozós függvények geometriai interpretációja

Legyen D egy xy -síkbeli tartomány, f pedig egy D -n értelmezett, valós értékű függvény, mely tetszőleges D -beli (x, y) pontnak egy $z = f(x, y)$ értéket feleltet meg. Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat a háromdimenziós Descartes-koordináta-rendszerben a függvény geometriai megfelelője, ezt a függvény grafikonjának nevezzük. A grafikont $z = f(x, y)$ felületnek is nevezzük. A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a szintvonalait és a koordináta síkokkal való metszetgörbéit. Az xy -sík azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény szintvonalának nevezzük.

Tekintsük át a nevezetes felületeket!

- **Forgásparaboloid** egyenlete (a legegyszerűbb alakban): $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ennek a szintvonalai koncentrikus körök, az yz - és xz -koordináta síkokkal való metszetei parabolák.
- **Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület** egyenlete (a legegyszerűbb alakban): $f(x, y) = y^2 - x^2$. Ennek a szintvonalai hiperbolák, az yz -síkkal való metszete a $z = y^2$ konvex parabola, míg az xz -síkkal való metszete a $z = -x^2$ konkáv parabola.
- **R -sugarú félgömb** egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$.
- **Forgáskúp** egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Az y -tengelyű, R -sugarú félhenger** egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - x^2}$.
- **Az egyköpenyű forgáshiperboloid** egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
- **A kétköpenyű forgáshiperboloid** egyenlete: $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága

A határérték definíciója:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

akkor és csak akkor, ha minden $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ pontsorozatra fennáll, hogy $f(x_n, y_n) \rightarrow A$. *Megjegyzés:* az egyváltozós függvények esetén tanult határérték műveletek ebben az esetben is igazak.

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény folytonos az értelmezési tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha létezik a határérték ebben a pontban és ez egyenlő a függvény ebben a pontban felvett helyettesítési értékével, azaz:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Egy függvény folytonos, ha folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.

Parciális derivált, érintősík

Egy $f(x, y)$ függvényt igen könnyű az egyes változói szerint deriválni, mert ilyenkor a másik változót rögzítettnek képzeljük, és csak a szóban forgó változó egyváltozós függvényének tekintjük a függvényt.

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli, x változó szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Hasonlóan az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli, y változó szerinti parciális deriváltja:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli, x -szerinti parciális deriváltjának geometriai jelentése nem más, mint a $z = f(x, y)$ felület és az $y = y_0$ egyenletű sík metszészvonala érintőjének meredeksége az (x_0, y_0) pontban. (Hasonlóan értelmezhető az y -szerinti derivált is.)

Parciális deriváltakkal könnyű felírni a $z = f(x, y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjában az érintősík egyenletét:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

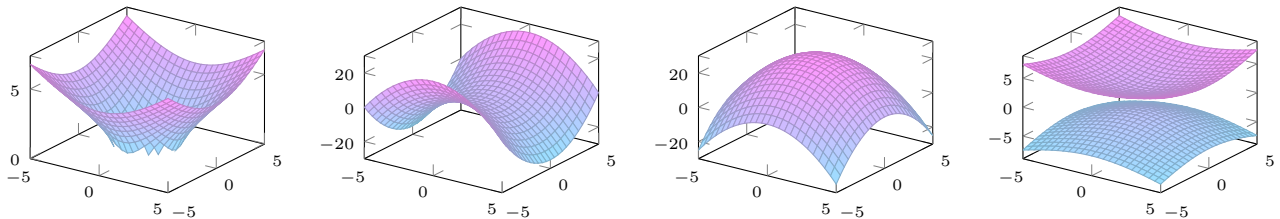
Megjegyzés: a magasabb rendű parciális deriváltak jelölése és jelentése is teljesen hasonló az elsőrendű deriváltakhoz. Azaz például:

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y.$$

Young-tétele szerint ha $f(x, y)$ és parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy nyílt tartományon, ami tartalmazza az (x_0, y_0) -t, akkor $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ teljesül.

2. Feladatok

1. Ismerd fel az ábrázolt nevezetes felületeket!



2. Határozd meg a következő függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait és azok értelmezési tartományát!

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ | (b) $f(x, y) = x^y$ |
| (c) $f(x, y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$ | (d) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| (e) $f(x, y) = \frac{x^3 e^y}{1 + \sin x + y^2}$ | (f) $f(x, y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$ |
| (g) $f(x, y) = x \operatorname{tg}(x + y)$ | (h) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$ |
| (i) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$ | (j) $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$ |
| (k) $f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$ | (l) $f(x, y) = \sqrt{x^3 - 5x^2 y + y^4}$ |
| (m) $f(x, y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3}$ | |

3. Határozd meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait! Ellenőrizze le, hogy valóban teljesül az $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ egyenlőség!

- | | | |
|------------------------------|---|------------------------------|
| (a) $f(x, y) = e^{xy}$ | (b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}$ | (c) $f(x, y) = y - xe^y + x$ |
| (d) $f(x, y) = \ln(x + e^y)$ | (e) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + y)$ | (f) $f(x, y) = x^y$ |

4. Írd fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$ és $P_0(1, -1)$ | (b) $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ és $P_0(1, 2)$ |
| (c) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ és $P_0(1, 2)$ | (d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy)$ és $P_0(2, 1/2)$ |
| (e) $f(x, y) = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x$ és $P_0(\pi/4, 0)$ | (f) $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} + 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ és $P_0(0, 1)$ |
| (g) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$ és $P_0(1, 1)$ | |

5. Határozd meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, -1, 3)$ ponton és párhuzamos az $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ felület $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

6. Az $f(x, y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az $x + y + z = 0$ síkkal?

7. Az $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?