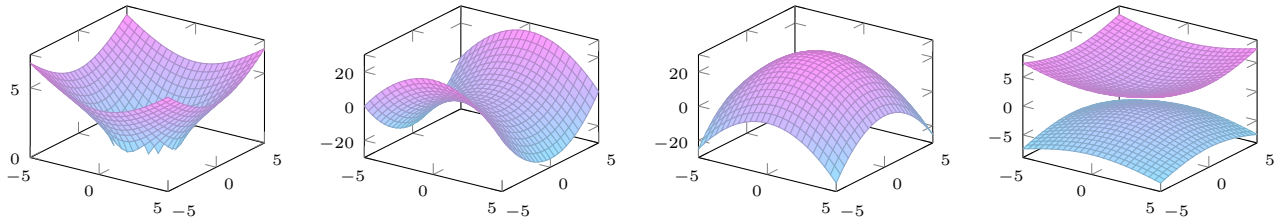


6. feladatsor

Kétváltozós függvények deriválása

1. Ismerd fel az ábrázolt nevezetes felületeket!



Megoldás A felületek az alábbiak (a képeken szereplő konkrét függvényekkel együtt).

- (1) Egyköpenyű forgáshiperboloid: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
- (2) Nyeregfelület: $f(x, y) = y^2 - x^2$.
- (3) Lefelé nyitott forgáspároloid: $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.
- (4) Kétköpenyű forgáshiperboloid: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 5}$.

2. Határozd meg a következő függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait és azok értelmezési tartományát!

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ | (b) $f(x, y) = x^y$ |
| (c) $f(x, y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$ | (d) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| (e) $f(x, y) = \frac{x^3 e^y}{1 + \sin x + y^2}$ | (f) $f(x, y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$ |
| (g) $f(x, y) = x \operatorname{tg}(x + y)$ | (h) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$ |
| (i) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$ | (j) $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$ |
| (k) $f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$ | (l) $f(x, y) = \sqrt{x^3 - 5x^2 y + y^4}$ |
| (m) $f(x, y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3}$ | |

Megoldás

(a)

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 3xy$$

Az értelmezési tartomány az egész sík lesz.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 6x - 3y,$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

$$f'_y(x, y) = 6y - 3x,$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

(b)

$$f(x, y) = x^y$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $x \geq 0$, kivéve az $x = y = 0$ pontot.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1},$$

ami értelmes, ha $x \geq 0$, kivéve az $x = y = 0$ pontot.

$$f'_y(x, y) = \ln(x) \cdot x^y,$$

ami értelmes, ha $x > 0$.

(c)

$$f(x, y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $xy > 0$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{y^2}{2x},$$

ami értelmes, ha $xy > 0$.

$$f'_y(x, y) = 2y \cdot \ln \sqrt{xy} + y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot x = y(1 + 2 \ln \sqrt{xy})$$

ami értelmes, ha $xy > 0$.

(d)

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$ és $x \neq 0$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{-y}{x^2},$$

ami értelmes, ha $-1 < \frac{y}{x} < 1$ és $x \neq 0$.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x},$$

ami értelmes, ha $-1 < \frac{y}{x} < 1$ és $x \neq 0$.

(e)

$$f(x, y) = \frac{x^3 e^y}{1 + \sin x + y^2}$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $(x, y) \neq (k \cdot \pi, 0)$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2 e^y (1 + \sin x + y^2) - x^3 e^y \cdot \cos x}{(1 + \sin x + y^2)^2},$$

ami értelmes, ha $(x, y) \neq (k \cdot \pi, 0)$.

$$f'_y(x, y) = \frac{x^3 e^y (1 + \sin x + y^2) - x^3 e^y \cdot 2y}{(1 + \sin x + y^2)^2},$$

ami értelmes, ha $(x, y) \neq (k \cdot \pi, 0)$.

(f)

$$f(x, y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $2x \neq 3y$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{e^{2x-3y} \cdot 2 \cdot (2x-3y) - e^{2x-3y} \cdot 2}{(2x-3y)^2},$$

ami értelmes, ha $2x \neq 3y$.

$$f'_y(x, y) = \frac{e^{2x-3y} \cdot (-3) \cdot (2x-3y) - e^{2x-3y} \cdot (-3)}{(2x-3y)^2},$$

ami értelmes, ha $2x \neq 3y$.

(g)

$$f(x, y) = x \operatorname{tg}(x + y)$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \operatorname{tg}(x + y) + x \cdot \frac{1}{\cos^2(x + y)},$$

ami értelmes, ha $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

$$f'_y(x, y) = x \cdot \frac{1}{\cos^2(x + y)},$$

ami értelmes, ha $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

(h)

$$f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $(x, y) \neq (0, 0)$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x,$$

ami értelmes, ha $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f'_y(x, y) = x \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y,$$

ami értelmes, ha $(x, y) \neq (0, 0)$.

(i)

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $x > 0$ és $y \neq 0$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot 7x^6 y^4,$$

ami értelmes, ha $x > 0$ és $y \neq 0$.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot x^7 4y^3,$$

ami értelmes, ha $x > 0$ és $y \neq 0$.

(j)

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$$

A függvény a sík minden pontjában értelmes lesz.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x - 5y - 6,$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

$$f'_y(x, y) = 6y - 5x + 7,$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

(k)

$$f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $3x - 5y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{\cos^2(3x - 5y)} \cdot 3,$$

ami értelmes, ha $3x - 5y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\cos^2(3x - 5y)} \cdot (-5),$$

ami értelmes, ha $3x - 5y \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

(l)

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}$$

Az értelmezési tartomány azon (x, y) párok halmaza, ahol $x^3 - 5x^2y + y^4 > 0$.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}} \cdot (3x^2 - 10xy),$$

ami értelmes, ha $x^3 - 5x^2y + y^4 > 0$.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}} \cdot (-5x^2 + 4y^3),$$

ami értelmes, ha $x^3 - 5x^2y + y^4 > 0$.

(m)

$$f(x, y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3}$$

Az értelmezési tartomány az egész sík lesz.

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3} \cdot (2x \sin x + x^2 \cos x - y^2 3x^2),$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

$$f'_y(x, y) = -e^{x^2 \sin x - y^2 x^3} \cdot 2yx^3,$$

ami értelmes a sík minden pontjában.

3. Határozd meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait! Ellenőrizze le, hogy valóban teljesül az $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ egyenlőség!

(a) $f(x, y) = e^{xy}$

(b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}$

(c) $f(x, y) = y - xe^y + x$

(d) $f(x, y) = \ln(x + e^y)$

(e) $f(x, y) = \arctg(x + y)$

(f) $f(x, y) = x^y$

Megoldás

(a)

$$f(x, y) = e^{xy}$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = e^{xy} \cdot y,$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = e^{xy} \cdot xy + e^{xy}.$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = e^{xy} \cdot x,$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = e^{xy} + xy \cdot e^{xy}.$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

(b)

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x + y}$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = -\frac{y^2}{(x + y)^2},$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = -\frac{2y(x + y)^2 - y^2 2(x + y)}{(x + y)^4} = -\frac{2x^2 y + 2xy^2}{(x + y)^4}.$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = \frac{2y(x + y) - y^2}{(x + y)^2} = \frac{2xy + y}{(x + y)^2},$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = \frac{(2x + 1)(x + y)^2 - (2xy + y)2(x + y)}{(x + y)^4}.$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

(c)

$$f(x, y) = y - x e^y + x$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = -e^y + 1,$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = -e^y.$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = 1 - x e^y,$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = -e^y.$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

(d)

$$f(x, y) = \ln(x + e^y)$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x + e^y},$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = -\frac{1}{(x + e^y)^2} \cdot e^y.$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{x + e^y} \cdot e^y,$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = -\frac{1}{(x + e^y)^2} \cdot e^y.$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

(e)

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + y)$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = -\frac{1}{(1 + (x + y)^2)^2} \cdot 2(x + y).$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y)^2},$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = -\frac{1}{(1 + (x + y)^2)^2} \cdot 2(x + y).$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

(f)

$$f(x, y) = x^y$$

Számítsuk ki az elsőrendű deriváltakat, majd azok segítségével a vegyes másodrendűeket.

$$f'_x(x, y) = y \cdot x^{y-1},$$

ami tovább deriválva y -szerint

$$f'_{xy}(x, y) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x.$$

Most számítsuk ki a másik vegyes tagot.

$$f'_y(x, y) = x^y \cdot \ln x,$$

amit tovább deriválva x -szerint

$$f'_{yx}(x, y) = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1}.$$

Látható, hogy valóban teljesül, hogy $f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y)$.

4. Írd fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

$$(a) \quad f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6 \text{ és } P_0(1, -1) \quad (b) \quad f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \text{ és } P_0(1, 2)$$

$$(c) \quad f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ és } P_0(1, 2) \quad (d) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy) \text{ és } P_0(2, 1/2)$$

$$(e) \quad f(x, y) = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x \text{ és } P_0(\pi/4, 0) \quad (f) \quad f(x, y) = 3y + e^{xy^2} + 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \text{ és } P_0(0, 1)$$

$$(g) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} \text{ és } P_0(1, 1)$$

Megoldás

(a)

$$f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6 \quad \text{és} \quad P_0(1, -1)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f(1, -1) = -9,$$

amiből a sík egy pontjában a koordinátái

$$(1, -1, -9).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = 10x - 2y + 5, \quad \text{ezért} \quad f'_x(1, -1) = 17,$$

$$f'_y(x, y) = -2x + 6y, \quad \text{ezért} \quad f'_y(1, -1) = -8,$$

amiből a sík normálvektora

$$(17, -8, -1).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$17x - 8y - z = 16.$$

(b)

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \quad \text{és} \quad P_0(1, 2)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f(1, 2) = 20,$$

amiből a sík egy pontjában a koordinátái

$$(1, 2, 20).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = 2(x - 3)(y^2 - 4y), \quad \text{ezért} \quad f'_x(1, 2) = 16,$$

$$f'_y(x, y) = 2(x^2 - 6x)(y - 2), \quad \text{ezért} \quad f'_y(1, 2) = 0,$$

amiből a sík normálvektora

$$(16, 0, -1).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$16x - z = -4.$$

(c)

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{és} \quad P_0(1, 2)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f(1, 2) = \frac{\pi}{6},$$

amiből a sík egy pontjában a koordinátái

$$\left(1, 2, \frac{\pi}{6}\right).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}, \quad \text{ezért} \quad f'_x(1, 2) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}, \quad \text{ezért} \quad f'_y(1, 2) = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

amiből a sík normálvektora

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -1\right).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y - z = -\frac{\pi}{6}.$$

(d)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy) \quad \text{és} \quad P_0 \left(2, \frac{1}{2} \right)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f \left(2, \frac{1}{2} \right) = 0,$$

amiből a sík egy pontjábak a koordinátái

$$\left(2, \frac{1}{2}, 0 \right).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = x + \frac{y^2}{x} + 2x \ln(xy), \quad \text{ezért} \quad f'_x \left(2, \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{8},$$

$$f'_y(x, y) = y + \frac{x^2}{y} + 2y \ln(xy), \quad \text{ezért} \quad f'_y \left(2, \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{2},$$

amiből a sík normálvektora

$$\left(\frac{17}{8}, \frac{17}{2}, -1 \right).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$\frac{17}{8}x + \frac{17}{2}y - z = \frac{17}{2}.$$

(e)

$$f(x, y) = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x \quad \text{és} \quad P_0 \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) = 0,$$

amiből a sík egy pontjábak a koordinátái

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0 \right).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{y}{\cos^2 x}, \quad \text{ezért} \quad f'_x \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) = 0,$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 y}, \quad \text{ezért} \quad f'_y \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) = \frac{\pi}{4} - 1,$$

amiből a sík normálvektora

$$\left(0, \frac{\pi}{4} - 1, -1 \right).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$\left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) y - z = 0.$$

(f)

$$f(x, y) = 3y + e^{xy^2} + 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{és} \quad P_0(0, 1)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f(0, 1) = 4,$$

amiből a sík egy pontjában a koordinátái

$$(0, 1, 4).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = e^{xy^2} y^2 + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{ezért} \quad f'_x(0, 1) = 3,$$

$$f'_y(x, y) = 2e^{xy^2} y + 2e^{xy^2} xy^3 + \frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{ezért} \quad f'_y(0, 1) = 2,$$

amiből a sík normálvektora

$$(3, 2, -1).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$3x + 2y - z = -2.$$

(g)

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} \quad \text{és} \quad P_0(1, 1)$$

Számítsuk ki a függvény értékét az adott pontban

$$f(1, 1) = \frac{1}{3},$$

amiből a sík egy pontjában a koordinátái

$$\left(1, 1, \frac{1}{3}\right).$$

Most számítsuk ki a parciális deriváltakat az adott pontban.

$$f'_x(x, y) = \frac{4xy^3}{(x^2 + 2y^2)^2}, \quad \text{ezért} \quad f'_x(1, 1) = \frac{4}{9},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{(x^2(x^2 - 2y^2))}{(x^2 + 2y^2)^2}, \quad \text{ezért} \quad f'_y(1, 1) = -\frac{1}{9},$$

amiből a sík normálvektora

$$\left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, -1\right).$$

A sík egyenlete innen adódik, hogy

$$\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - z = 0.$$

5. Határozd meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, -1, 3)$ ponton és párhuzamos az $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ felület $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

Megoldás A keresett sík normálvektora párhuzamos kell legyen az $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ függvénynek a $P_0\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ pontbeli érintősíkjának a normálvektorával (vagyis ugyanaz a normálvektor teljesen jó lesz). Másfelől természetesen át kell haladnia a $P(2, -1, 4)$ ponton. Vagyis egy pont a síkon

$$(2, -1, 4).$$

A normálvektorhoz számítsuk ki a parciális deriváltakat a P_0 pontban.

$$f'_x(x, y) = -2x \sin(x^2 + y^2), \quad \text{ezért} \quad f'_x\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\sqrt{\pi},$$

$$f'_y(x, y) = -2y \sin(x^2 + y^2), \quad \text{ezért} \quad f'_y\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\sqrt{\pi},$$

amiből a normálvektor

$$(-\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, -1).$$

A keresett sík egyenlete pedig ekkor

$$\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}y + z = \sqrt{\pi} + 4.$$

6. Az $f(x, y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az $x + y + z = 0$ síkkal?
Megoldás Azon pontokat kell megadni, amelyekben az $f(x, y) = \ln(xy)$ függvényhez tartozó érintősík normálvektora párhuzamos az $x + y + z = 0$ sík normálvektorával, vagyis az

$$(1, 1, 1)$$

vektorral.

Számítsuk ki a parciális deriváltakat

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad f'_y(x, y) = \frac{1}{y},$$

amiből az érintősík normálvektora egy tetszőleges (x, y) pontban

$$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -1\right)$$

Mivel ennek a vektornak kell párhuzamosnak lennie az $(1, 1, 1)$ vektorral, ezért valamilyen λ valós számra az alábbi azonosságoknak kell teljesülnie

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \lambda \\ \frac{1}{y} &= \lambda \\ -1 &= \lambda, \end{aligned}$$

amiből nyilvánvalóan $\lambda = -1$ és

$$\frac{1}{x} = -1 \quad \text{és} \quad \frac{1}{y} = -1$$

kellenek, hogy teljesüljenek. Innen pedig $x = -1$ és $y = -1$, amiből a keresett pont

$$(-1, -1).$$

7. Az $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

Megoldás Egy sík pontosan akkor vízszintes, ha a normálvektora merőleges az xy síkra, vagyis párhuzamos az

$$(0, 0, 1)$$

vektorral.

Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ függvénynek a parciális deriváltjait.

$$f'_x(x, y) = 2x - 2y - 5 \quad \text{és} \quad f'_y(x, y) = 6y - 2x + 3,$$

amiből egy tetszőleges (x, y) pontban a függvényhez húzott érintő normálvektora

$$(2x - 2y - 5, 6y - 2x + 3, -1)$$

Ennek a vektornak kell párhuzamosnak lennie a $(0, 0, 1)$ vektorral. Vagyis valamilyen λ valós számra teljesülnie kell, hogy

$$2x - 2y - 5 = 0$$

$$6y - 2x + 3 = 0$$

$$-1 = \lambda.$$

Ekkor meg kell oldanunk az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$2x - 2y - 5 = 0$$

$$6y - 2x + 3 = 0$$

Ennek a megoldása

$$x = 3 \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}.$$

Adódik, hogy a keresett pont

$$\left(3, \frac{1}{2}\right).$$